ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int(x^3+3x^2-4x+5)dx$.

Λύση:

$$\int(x^3+3x^2-4x+5)dx=\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+5x+c$$

Α2. Δίνεται ο αριθμός των λίτρων νερού που καταναλώνουν 9 υπάλληλοι μιας εταιρείας σε μία βδομάδα:

$$15, 20, 15, 22, 17\ , 21\ , 18, 20, 21$$

(α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 . **(3 μον.)**

(β) Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων. **(2 μον.)**

Λύση:

(α) Διάταξη σε αύξουσα σειρά: 15,15,17,18,20,20,21,21,22.

$$Q_2=20$$

$$Q_1=\frac{15+17}{2}=16$$

$$Q_3=\frac{21+21}{2}=21$$

(β) Εύρος $R=22-15=7$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος $I=Q_3-Q_1=21-16=5$

Α3. Να υπολογίσετε πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία του συνόλου

$$A = \{0,1,2,4,5,6,8\},$$

αν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.

Λύση:

Για την επιλογή του ψηφίου των εκατοντάδων υπάρχουν 6 διαφορετικές περιπτώσεις.

Για την επιλογή του ψηφίου των δεκάδων υπάρχουν 7 διαφορετικές περιπτώσεις.

Για την επιλογή του ψηφίου των μονάδων υπάρχουν 7 διαφορετικές περιπτώσεις.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot 7^2$ διαφορετικές περιπτώσεις.

Σύνολο 294 διαφορετικούς αριθμούς

Α4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 9x + 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$.
Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β, αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 3$ και σημείο καμπής στο $x = 1$.

Λύση:

Τ.Α. $\Rightarrow f'(3) = 0\ (1)$ και

Σ.Κ. $\Rightarrow f''(1) = 0\ (2)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x - 9$ και $f''(x) = 6ax + 2\beta$

$$(2) \Rightarrow 6\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = -3\alpha\ \ (3)$$

και

$$(1) \Rightarrow 27\alpha + 6\beta = 9 \overset{(3)}{\Rightarrow} 27\alpha - 18\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 1$$

Επομένως $\beta = -3$

Α5. Το κέρδος P από την μηνιαία πώληση x τόνων ενός προϊόντος, σε χιλιάδες ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{8}{5}x - 3\ , \qquad 4 < x < 28$$

Να υπολογίσετε:

(α) την μηνιαία πώληση σε τόνους, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό, **(3 μον.)**

(β) το μέγιστο δυνατό κέρδος.

(2 μον.)

Λύση:

(α) $P(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{8}{5}x - 3 \;\Rightarrow P'(x) = -\frac{2}{20}x + \frac{8}{5}$ και $P''(x) = -\frac{2}{20}$

$P'(x) = 0 \Rightarrow \; -\frac{1}{10}x + \frac{8}{5} = 0 \;\Rightarrow\; -x + 16 = 0 \;\Rightarrow x = 16$ τόνους

$P''(16) = -\frac{2}{20} < 0$ τότε η P παρουσιάζει μέγιστο κέρδος στο $x = 16$ τόνους

(β) $P(16) = -\frac{1}{20}16^2 + \frac{8}{5}16 - 3 = \; 9{,}8$

Το μέγιστο κέρδος είναι 9800 ευρώ

Α6. Γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι θα καθίσουν 10 άτομα, μεταξύ των οποίων βρίσκονται ο Μάριος, η Έλενα και η μητέρα τους Γεωργία. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 10 άτομα αν:
(α) δεν υπάρχει περιορισμός,
(β) μεταξύ του Μάριου και της Έλενας θα κάθεται η μητέρα τους Γεωργία.

Λύση:

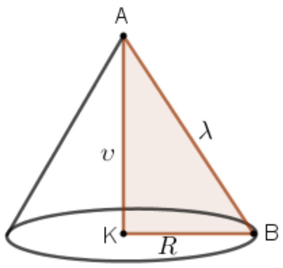
(α) $K_{10} = (10-1)! = 362880$

(β) Η τοποθέτηση στο κυκλικό τραπέζι θα γίνει σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση η μητέρα και τα δύο παιδιά της θα κινούνται ως ένα αντικείμενο άρα θα υπάρχουν
$K_8 = (8-1)! = 5040$ τρόποι ενώ στη δεύτερη φάση τα παιδιά αλλάζουν θέση άρα υπάρχουν 2 τρόποι.

Συνολικά υπάρχουν $5040 \cdot 2 = 10080$ τρόποι.

Α7. Ένας κώνος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας διπλάσιο του εμβαδού της βάσης του. Αν το ύψος του είναι $4\sqrt{3}\;cm$, να υπολογίσετε τον όγκο του.

Λύση:



$E_\kappa = 2E_\beta$

$\pi R\lambda = 2\pi R^2$ τότε $\lambda = 2R$

Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο KAB:

$\upsilon^2 + R^2 = \lambda^2$ τότε $\left(4\sqrt{3}\right)^2 + R^2 = (2R)^2$ τότε $R = 4cm$

$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \frac{\pi 4^2 \cdot 4\sqrt{3}}{3} = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3} cm^3$

Α8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 20\,,\ x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f και να τα χαρακτηρίσετε.

(3 μον.)

(β) Να βρείτε την ολικά μέγιστη και ολικά ελάχιστη τιμή της f στο διάστημα $[-2{,}3]$.

(2 μον.)

Λύση:

(α) $f'(x) = -3x^2 + 6x$ και $f'(x) = 0 \Rightarrow -3x(x-2) \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0{,}2]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[2, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$, $f(0) = 20$, $(0{,}20)$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 2$, $f(2) = 24$, $(2{,}24)$

(β) Συγκρίνω τις τιμές

$$f(-2) = 40, \qquad f(0) = 20, \qquad f(2) = 24, \qquad f(3) = 20$$

Άρα ολικά μέγιστη τιμή στο διάστημα $[-2{,}3]$ είναι 40

και ολικά ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[-2{,}3]$ είναι 20

Α9. Δίνεται η λέξη ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(2 μον.)

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

i. έχουν τα φωνήεντα συνεχόμενα;

ii. αρχίζουν με τη λέξη ΝΕΑ και περιέχουν τη λέξη ΓΗ;

(3 μον.)

Λύση:

(α) Η λέξη ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ έχει 10 γράμματα με το Ν να εμφανίζεται 3 φορές, το Α 2 φορές και το Η 2 φορές.

Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης είναι επαναληπτικές μεταθέσεις και ισούται με

$$M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200$$

(β) i. Η λέξη έχει 5 φωνήεντα και 5 σύμφωνα άρα οι μεταθέσεις των γραμμάτων θα γίνουν σε 2 φάσεις όπου στην πρώτη θα μετακινούνται τα σύμφωνα και ως ένα αντικείμενο τα φωνήεντα με $\frac{6!}{3!} = 120$ τρόπους και

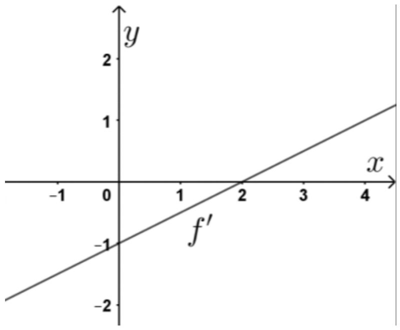
στη δεύτερη φάση τα φωνηέντα μεταξύ τους με $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$ τρόπους.

Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών ισούται με $120 \cdot 30 = 3600$

ii. Αφού οι αναγραμματισμοί θα αρχίζουν με τη λέξη ΝΕΑ τότε θα μετακινούνται μόνο 7 γράμματα με το ΓΗ να λειτουργεί ως ένα. Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών ισούται με

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

Α10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται μια ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μιας συνάρτησης f.



(α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

(2 μον.)

(β) Να βρείτε τη θέση του τοπικού ακροτάτου της f και να το χαρακτηρίσετε.

(1 μον.)

(γ) Να βρείτε τον τύπο της f, αν η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{4}\right)$. **(2 μον.)**

Λύση:

(α)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	**0**	$+$
$f(x)$	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

(β) Η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο στο $x = 2$

(γ) Από την γραφική παράσταση έχουμε $f'(x) = y = \lambda x + \beta$ με $\beta = -1$ (τομή με άξονα των τεταγμένων) και $\lambda = \frac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2}$

Β΄ τρόπος $f'(x) = \lambda x + \beta \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

Άρα $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx = \frac{x^2}{4} - x + c$$

Η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\frac{1}{4} - 1 + c = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(2 μον.)**

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς:

i. την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, **(3 μον.)**

ii. την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, **(2 μον.)**

iii. τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. **(1 μον.)**

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **(2 μον.)**

Λύση:

(α)

$\boldsymbol{\Pi.O.}$: $\mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

Για $y = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0$ διπλή ή $x = -3 \Rightarrow (-3,0), (0,0)$

(β)

i Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

Θέτω $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = -2$

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\quad$ 0	$\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0	$-$ $\quad$ 0	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (0,0)$ Τ.Ε. και για $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 4 \Rightarrow$ $(-2, 4)$ Τ.Μ.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$

ii:Κυρτότητα και Σημεία καμπής

$f''(x) = 6x + 6$

Θέτω $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow x = -1$

x	-∞ $\quad$ -1	$\quad$ +∞
$f''(x)$	- $\quad$ 0	+
$f(x)$	⌒	⌣

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο διάστημα $[-1, +\infty)$

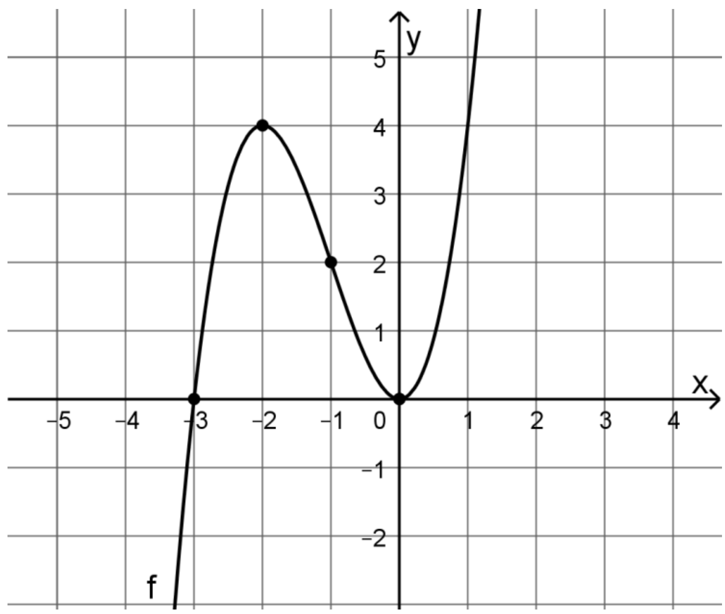
για $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \quad (-1, 2)$ Σ.Κ

iii Συμπεριφορά στα άκρα του Π.Ο:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$

(γ) Γραφική Παράσταση



Β2. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα χρήματα, σε ευρώ, που ξόδεψαν δύο παιδιά στις οκτώ μέρες των διακοπών τους.

Ημέρα	Παιδί (x_i)	Παιδί (y_i)
1η	19	18
2η	19	16
3η	17	18
4η	14	13
5η	13	14
6η	20	18
7η	11	10
8η	15	13

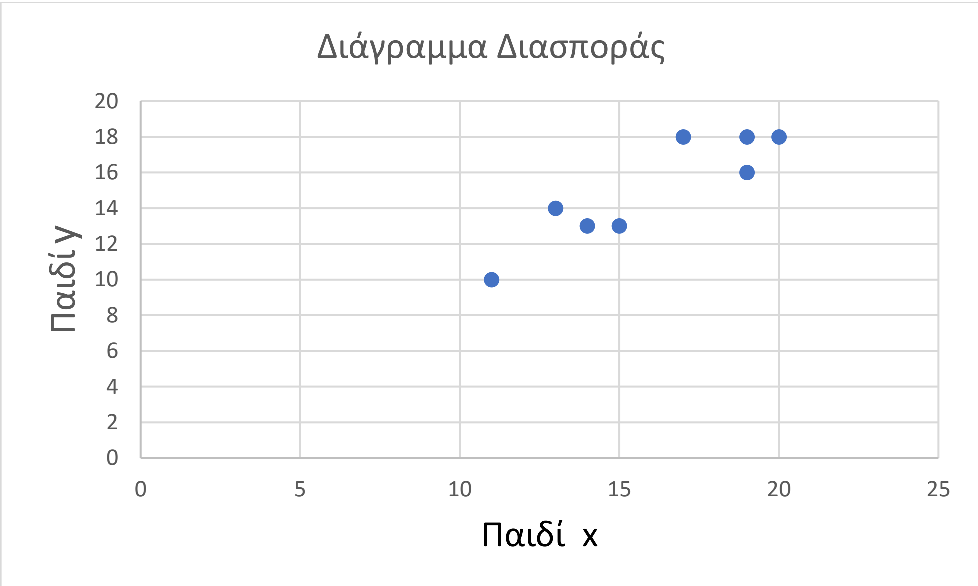
(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(3 μον.)**

(β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. **(6 μον.)**

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. **(1 μον.)**

Λύση:

(α)



(β)

	Xi	Yi	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
	19	18	342	9	9
	19	16	304	9	1
	17	18	306	1	9
	14	13	182	4	4
	13	14	182	9	1
	20	18	360	16	9
	11	10	110	25	25
	15	13	195	1	4
Άθροισμα	**128**	**120**	**1981**	74	62
Μέση Τιμή	$\bar{X} =$ 16	$\bar{Y} =$ 15			
	$S_x = \sqrt{\frac{74}{8}} = 3{,}041$		$S_y = \sqrt{\frac{62}{8}} = 2{,}78$		

(β) Ισχύει ότι $\Sigma_{x_\iota y_i} = 1981$

$\bar{x} = 16$ και $\bar{y} = 15$ καθώς και ότι $S_x = 3{,}04$ *και* $S_y = 2{,}78$

$$Επομένως\ r = \frac{\Sigma_{x_\iota y_i} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y} = \frac{1981 - 8\cdot16\cdot15}{8\cdot3{,}04\cdot2{,}78} = \frac{1981-1920}{67{,}61} = 0{,}902$$

(γ) Η συσχέτιση είναι ισχυρά γραμμική θετική.

Β3. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 20 μπάλες, αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20.

(α) Παίρνουμε 5 μπάλες από το δοχείο, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν:

i. δεν υπάρχει περιορισμός,

ii. πάρουμε μόνο μπάλες με άρτιο αριθμό,

iii. πάρουμε το πολύ 2 μπάλες με άρτιο αριθμό,

iv. πάρουμε τις μπάλες με τους αριθμούς 10 και 19 και όχι την μπάλα με τον αριθμό 1.

(8 μον.)

(β) Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 7 μπάλες από το δοχείο, 3 μπάλες με άρτιο αριθμό και 4 μπάλες με περιττό αριθμό και να τις τοποθετήσουμε σε σειρά, έτσι ώστε οι μπάλες με περιττό αριθμό και οι μπάλες με άρτιο αριθμό να είναι εναλλάξ.

(2 μον.)

Λύση:

(α) i $\binom{20}{5} = \frac{20!}{15!5!} = 15504$

ii $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$

iii $\binom{10}{2}\binom{10}{3} + \binom{10}{1}\binom{10}{4} + \binom{10}{0}\binom{10}{5} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{10!}{3!7!} + \frac{10!}{1!9!} \cdot \frac{10!}{4!6!} + \frac{10!}{10!} \cdot \frac{10!}{5!5!} =$

$$= 45 \cdot 120 + 10 \cdot 210 + 1 \cdot 252 = 7752$$

iv $\binom{17}{3} = \frac{17!}{3!14!} = 680$

(β) Πρώτη φάση επιλογή 3 μπάλες με άρτιο αριθμό και 4 μπάλες με περιττό αριθμό $\binom{10}{4} \cdot \binom{10}{3}$

Δεύτερη φάση τοποθέτηση τους σε σειρά έτσι ώστε οι μπάλες με περιττό αριθμό και οι μπάλες με άρτιο αριθμό να είναι εναλλάξ. Αφού οι μπάλες με περιττό αριθμό είναι 4 τότε κάθε τοποθέτηση θα αρχίζει με μπάλα με περιττή ένδειξη.

Δηλαδή,

Π **Α** **Π** **Α** **Π** **Α** **Π**

Οι μπάλες με περιττό αριθμό τοποθετούνται σε σειρά με M_4 τρόπους.

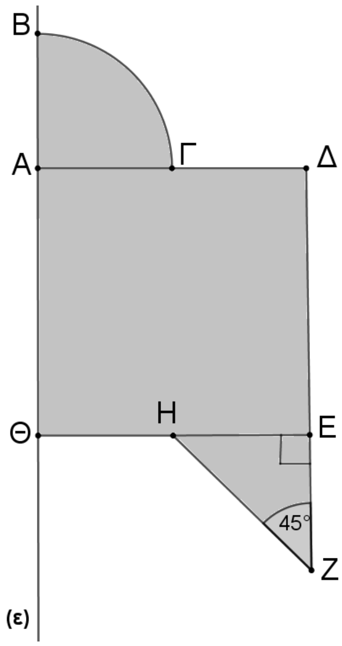
Οι μπάλες με άρτιο αριθμό τοποθετούνται σε σειρά με M_3 τρόπους.

Από την αρχή της απαρίθμησης έχουμε:

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{10}{3} \cdot M_4 \cdot M_3 = \frac{10!}{4!\,6!} \cdot \frac{10!}{3!\,7!} \cdot 4! \cdot 3! = 3628800$$

B4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο $ΑΔΕΘ$. Με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $ΑΓ = 2cm$, γράφουμε τόξο $ΒΓ$ έξω από το $ΑΔΕΘ$. Τα σημεία $Γ$ και $Η$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΔ$ και $ΘΕ$ αντίστοιχα.
Το τρίγωνο $ΗΕΖ$ είναι ορθογώνιο με $Η\hat{Ε}Ζ = 90^o$ και $Ε\hat{Ζ}Η = 45^o$.
Το σκιασμένο χωρίο $(ΒΓΔΖΗΘΒ)$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $(ε)$.
Να υπολογίσετε:
(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και **(6 μον.)**

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται. **(4 μον.)**

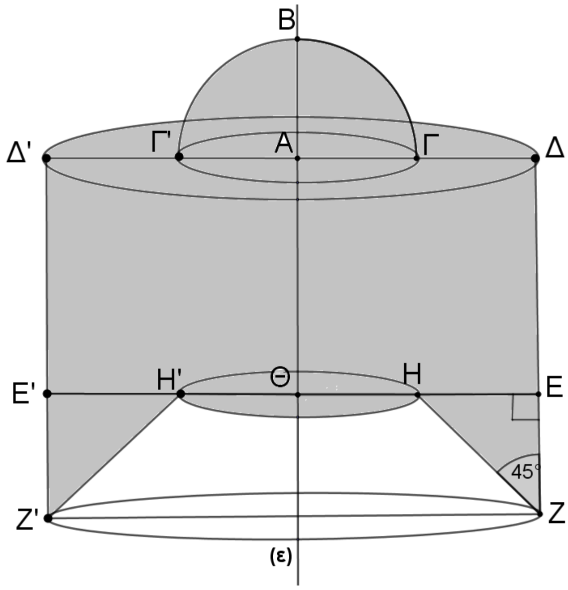


Λύση:

Κύλινδρος ΔΖ
$R = 4cm$
$υ = 6cm$

Κόλουρος κώνος ΗΖ
Το τρίγωνο $ΗΕΖ$ είναι ορθογώνιο με $Η\hat{Ε}Ζ = 90^o$ και $Ε\hat{Ζ}Η = 45^o \Longrightarrow Ε\hat{Η}Ζ = 45^o$ άρα το τρίγωνο $ΗΕΖ$ είναι ισοσκελές. Άρα $ΗΕ = ΕΖ = 2cm$
$R = 4cm$
$ρ = 2cm$
$υ = 2cm$
$Π.Θ: λ^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow λ^2 = 8 \Rightarrow λ$
$= 2\sqrt{2}cm$

Ημισφαίριο
$R = 2cm$



(α)
$$Ε_{ημισφ} = \frac{4πR^2}{2} = \frac{4π2^2}{2} = 8πcm^2$$
$$Ε_{ΔΑΚΤ.ΓΔ} = πR^2 - πρ^2 = π \cdot 4^2 - π \cdot 2^2$$
$$= 16π - 4π = 12πcm^2$$

$$Ε_κ^{κυλ} = 2πRυ = 2π \cdot 4 \cdot 6 = 48π\ cm^2$$
$$Ε_κ^{κολ\,κων} = π(R + ρ)λ$$
$$= π \cdot (4 + 2) \cdot 2\sqrt{2}$$
$$= 12\sqrt{2}π\ cm^2$$

$E_{\beta}^{\kappa o\lambda\,\kappa\omega\nu} = \pi\rho^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi\ cm^2$

$$E_{o\lambda} = E_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} + E_{\Delta AKT.\Gamma\Delta} + E_{\kappa}^{\kappa\upsilon\lambda} + E_{\kappa}^{\kappa o\lambda.\kappa\omega\nu} + E_{\beta}^{\kappa o\lambda\,\kappa\omega\nu}$$
$$= 8\pi + 12\pi + 48\pi + 12\sqrt{2}\pi + 4\pi = (72 + 12\sqrt{2})\pi\ cm^2$$

(β)

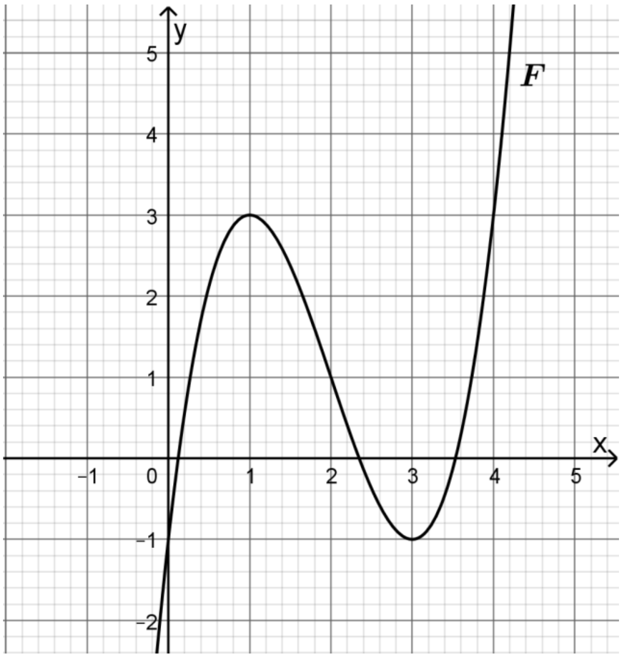
$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2 \upsilon = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi cm^3$

$$V_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} = \frac{4\pi R^3}{3 \cdot 2} = \frac{4\pi 2^3}{6} = \frac{16\pi}{3} cm^3$$

$$V_{\kappa o\lambda.\kappa\omega\nu} = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2) = \frac{2\pi}{3}(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = \frac{56\pi}{3} cm^3$$

$$V_{\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon o\acute{\upsilon}} = V_{\kappa\upsilon\lambda} + V_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} - V_{\kappa o\lambda.\kappa\omega\nu} = 96\pi + \frac{16\pi}{3} - \frac{56\pi}{3} = \frac{248\pi}{3} cm^3$$

Β5. Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της τρίτου βαθμού πολυωνυμικής συνάρτησης F για την οποία ισχύει $F''(2) = 0$.



(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση F:

i. ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατά της **(3 μον.)**

ii. ως προς την κυρτότητα και το σημείο καμπής της. **(3 μον.)**

(β) Αν ισχύει ότι $\int f(x)dx = F(x) + c$,

i. να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τη θέση του τοπικού ακρότατού της και να το χαρακτηρίσετε, **(3 μον.)**

ii. να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση f. **(1 μον.)**

Λύση:

(α) i. Η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$.
Η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.
Η συνάρτηση F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $(1,3)$ και τοπικό ελάχιστο $(3, -1)$.

ii. Αφού η $F''(2) = 0$, τότε σύμφωνα με τη γραφική παράσταση
η συνάρτηση F είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$
και άρα παρουσιάζει σημείο καμπής το $(2,1)$.

(β) i. Αφού $\int f(x)dx = F(x) + c$ τότε $f(x) = F'(x)$ και $f'(x) = F''(x)$

Η συνάρτηση F είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ τότε $F''(x) = f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2]$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$.

Η συνάρτηση F είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$ τότε $F''(x) = f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Αφού $F''(2) = 0$ τότε $f'(2) = 0$ κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f'

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	2	$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x) = F''(x)}$	$-$	0	+
$\boldsymbol{f}$	↘	Τ.Ε	↗

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$

ii. Η f είναι δευτέρου βαθμού άρα είναι παραβολή με ελάχιστο. Συνεπώς είναι κυρτή και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

ΤΕΛΟΣ