ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή 17/06/2022, 08:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.
Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx$ **(3μ)**

β) $\int (\varepsilon\varphi^5 x + \varepsilon\varphi^7 x) dx, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **(2μ)**

Α2. **α)** Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. **(2μ)**

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[1, e]$ και να υπολογίσετε τιμή στο διάστημα $(1, e)$ η οποία ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. **(3μ)**

Α3. Πενταμελής επιτροπή θα σχηματιστεί από μια ομάδα μαθητών η οποία αποτελείται από 5 κορίτσια και 7 αγόρια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή αν:

α) Η επιτροπή περιλαμβάνει 2 κορίτσια και 3 αγόρια. **(2μ)**

β) Δυο συγκεκριμένα αγόρια της ομάδας, ο Α και ο Β, αρνούνται να τοποθετηθούν ταυτόχρονα στην επιτροπή. **(3μ)**

Α4. Να υπολογίσετε τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$ για την οποία ισχύει

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa^2 - 4\kappa) = \nu(\nu+1)$$

Α5. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4\alpha x, \alpha > 0$ και εστία E. Έστω $T(\alpha t^2, 2\alpha t)$, $t \neq 0$ τυχαίο σημείο της. Αν A η προβολή του σημείου T στην διευθετούσα της παραβολής και M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AE, να αποδείξετε ότι η TM τέμνει κάθετα την AE.

Α6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x - 2\text{τοξεφ}x \ ,$$

όπου $\text{τοξεφ}x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(3μ)**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ ισχύει

$$2x - 4\text{τοξεφ}x \ \leq \pi - 2$$ **(2μ)**

Α7. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x + 4$$

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Τ, το οποίο περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. **(3μ)**

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Τ γύρω από των άξονα των τετμημένων. **(2μ)**

Α8. Θεωρούμε τον κύκλο $x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y + \kappa - 1 = 0$. Να βρείτε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $y = 3x + 1$ τέμνει τον κύκλο σε σημεία A και B, έτσι ώστε η γωνία AOB να είναι ορθή, όπου O η αρχή των αξόνων.

Α9. Δίνεται η λέξη «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ».

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. **(1μ)**

β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με τη λέξη «ΑΞΙΟΣ». **(2μ)**

γ) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ» στους οποίους το «Α» προηγείται του «Λ» και το «Λ» προηγείται του «Σ». **(2μ)**

Α10. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I(x) = \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} dt \ , \ \text{με } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι **(3μ)**

$$I(x) = 2 - \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}$$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x)$ **(2μ)**

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Έστω η πραγματική συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

Β2. Δίνονται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$ και τα σημεία του $A(0, R)$, $B(0, -R)$ και $T(R\sigma\upsilon\nu\theta, R\eta\mu\theta)$, με $0 < \ \theta < \frac{\pi}{2}$. Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο T και είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Γ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AT\Gamma B$ είναι ίσο με

$$E = R^2 \sigma\upsilon\nu\theta (1 + \eta\mu\theta)$$

β) Να βρείτε την τιμή του θ έτσι ώστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου να είναι μέγιστο.

B3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx$$

(3μ)

β) Αν $g(x) = f(x) + f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx$$

(3μ)

γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - \text{ημ}^5 x}{x^2 + 16} + \text{συν}2x\right) dx$$

(4μ)

B4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - \sqrt{x}\,,\ x \in (0, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής. **(3μ)**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ είναι $x - 2y - 3 = 0$. **(3μ)**

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,16)$ ισχύει

$$x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln x^2$$ **(4μ)**

B5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και τυχαίο σημείο της $P(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο P είναι

$$5x\,\eta\mu\theta - 3y\,\sigma\upsilon\nu\theta = 16\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta$$ **(3μ)**

β) Η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του PK είναι έλλειψη. **(4μ)**

γ) Αν E η εστία στον θετικό ημιάξονα και ε η εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{EK}{EP} = \varepsilon$. **(3μ)**

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ