ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 17/6/2022

Προτεινόμενες Λύσεις

ΜΕΡΟΣ Α΄:

<table>
<tr><td>Α1</td><td>Να βρείτε τα ολοκληρώματα:
α) $\int\left(e^{2x}+4x-\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx$ (3μ)

β) $\int(\text{εφ}^5x+\text{εφ}^7x)dx,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (2μ)

Λύση:
α) $\int\left(e^{2x}+4x-\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx=\frac{e^{2x}}{2}+2x^2-\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$
$=\frac{e^{2x}}{2}+2x^2-x-\tau o\xi\varepsilon\varphi\ x+c$

β) $\int(\text{εφ}^5x+\text{εφ}^7x)dx=\int\varepsilon\varphi^5x\,(1+\text{εφ}^2x)dx$
$=\int\varepsilon\varphi^5x\,(\tau\varepsilon\mu^2x)dx=\frac{\varepsilon\varphi^6x}{6}+c$</td></tr>
<tr><td>Α2</td><td>α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. (2μ)
β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln x$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[1,e]$ και να υπολογίσετε τιμή στο διάστημα $(1,e)$ η οποία ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. (3μ)</td></tr>
</table>

	Λύση: α) Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει: (α) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$ β) Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in (1, e)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[1, e]$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $$f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{1 - 0}{e - 1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1}{e - 1} \Rightarrow \xi = e - 1$$ Επομένως υπάρχει ο $\xi = e - 1 \in (1, e)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.
Α3	Πενταμελής επιτροπή θα σχηματιστεί από μια ομάδα μαθητών η οποία αποτελείται από 5 κορίτσια και 7 αγόρια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή αν: **α)** Η επιτροπή περιλαμβάνει 2 κορίτσια και 3 αγόρια. **(2μ)** **β)** Δυο συγκεκριμένα αγόρια της ομάδας, ο Α και ο Β, αρνούνται να τοποθετηθούν ταυτόχρονα στην επιτροπή. **(3μ)** **Λύση:** **α)** $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 10 \cdot 35 = 350$ **β)** Έστω Α και Β τα δυο συγκεκριμένα αγόρια. Η επιλογή των αγοριών μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους: i. Επιλέγεται ο Α ή ο Β και τέσσερα άλλα παιδιά: $\binom{2}{1} \cdot \binom{10}{4} = 2 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 420$ ii. Δεν επιλέγονται οι Α και Β: $\binom{10}{5} = 252$ Συνολικά, $420 + 252 = 672$

Β΄ τρόπος

Όλες οι περιπτώσεις εκτός από τις περιπτώσεις στις οποίες οι Α και Β βρίσκονται ταυτόχρονα στην επιτροπή

$$\binom{12}{5}-\binom{10}{3}=792-120=672$$

Α4

Να υπολογίσετε τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$ για την οποία ισχύει:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa^2-4\kappa)=\nu(\nu+1)$$

Λύση:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa^2-4\kappa)=2\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2-4\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\nu(\nu+1)(2\nu+1)-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\nu(\nu+1)$$

Άρα

$$\frac{1}{3}\cdot\nu(\nu+1)(2\nu+1)-2\cdot\nu(\nu+1)=\nu(\nu+1)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}\cdot\nu(\nu+1)(2\nu+1)-3\cdot\nu(\nu+1)=0$$

$$\nu(\nu+1)\left[\frac{1}{3}(2\nu+1)-3\right]=0$$

$$\nu=0\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\,,\qquad \nu=-1\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota,$$

$$2\nu+1-9=0\Rightarrow\nu=4\ \ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}$$

Α5

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=4\alpha x, \alpha>0$ και εστία E. Έστω $T(\alpha t^2,2\alpha t),\quad t\neq 0$ τυχαίο σημείο της. Αν A η προβολή του σημείου T στην διευθετούσα της παραβολής και M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AE, να αποδείξετε ότι η TM τέμνει κάθετα την AE.

Λύση:

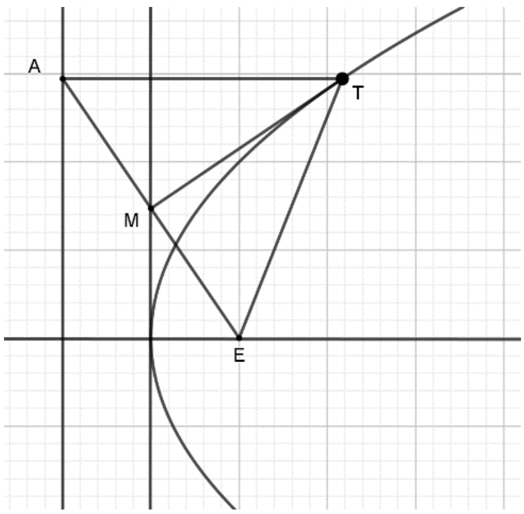
Από τον ορισμό της παραβολής

$$TA=TE$$

Άρα, ATE ισοσκελές τρίγωνο

και επειδή TM διάμεσος, τότε TM ύψος.

Επομένως, $TM\perp AE$



Β΄ τρόπος

Αφού το A είναι η προβολή του T στην διευθετούσα, τότε $A(-\alpha, 2\alpha t)$.

Η εστία της παραβολής είναι $E(\alpha, 0)$.

Το μέσον του AE είναι το σημείο

$$M\left(\frac{-\alpha+\alpha}{2}, \frac{2\alpha t+0}{2}\right) \equiv M(0, \alpha t)$$

Έχουμε

$$\lambda_{TM} \cdot \lambda_{AE} = \frac{2\alpha t - \alpha t}{\alpha t^2 - 0} \cdot \frac{2\alpha t - 0}{-\alpha - \alpha} = \frac{\alpha t}{\alpha t^2} \cdot \frac{2\alpha t}{-2\alpha} = -1$$

Συνεπώς, $TM \perp AE$

A6

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - 2\text{τοξεφ}x$$

όπου $\text{τοξεφ}x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(3μ)**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ ισχύει
$2x - 4\text{τοξεφ}x \leq \pi - 2$ **(2μ)**

Λύση:

α) $f(x) = x - 2\text{τοξεφ}x \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και στο διάστημα $[1, +\infty)$.
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ την τιμή $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ την τιμή $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$

β) $\forall x \in (-\infty, 1]$, παρατηρώ ότι $f(x) \leq f(-1)$

Επομένως, $x - 2\text{τοξεφ}x \leq -1 + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 2x - 4\text{τοξεφ}x \leq \pi - 2$

A7

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με

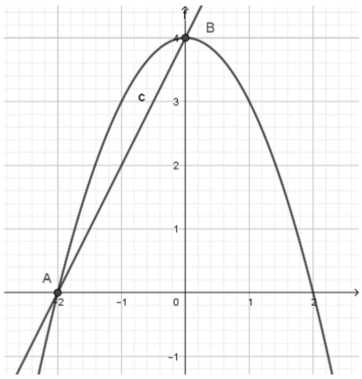
$$f(x) = -x^2 + 4 \text{ και } g(x) = 2x + 4$$

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Τ, το οποίο περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. **(3μ)**

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Τ γύρω από των άξονα των τετμημένων. **(2μ)**

Λύση:

Εύρεση σημείων τομής:



$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 0$$

Άρα, $A(-2\,,0)$ και $B(0\,,4)$

α)

$$E = \int_{-2}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-2}^{0} (-x^2 + 4 - 2x - 4)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}\ \tau.\mu.$$

β)

$$V = \pi \int_{-2}^{0} \big(f^2(x) - g^2(x)\big)dx = \pi \int_{-2}^{0} ((-x^2 + 4)^2 - (2x + 4)^2)dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} (x^4 - 12x^2 - 16x)dx$$

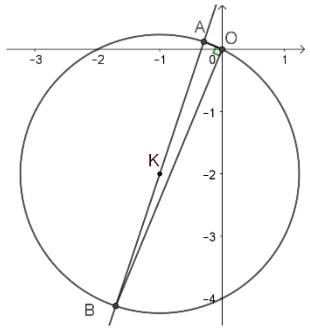
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 4x^3 - 8x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - 32 + 32\right] = \frac{32}{5}\pi \quad \kappa.\mu.$$

A8

Θεωρούμε τον κύκλο $x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y + \kappa - 1 = 0$. Να βρείτε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $y = 3x + 1$ τέμνει τον κύκλο σε σημεία A και B, έτσι ώστε η γωνία AOB να είναι ορθή, όπου O η αρχή των αξόνων.

Α΄ Λύση:



Ο κύκλος διέρχεται από το $(0,0)$, άρα $\kappa - 1 = 0 \Longrightarrow \kappa = 1$.

Η εγγεγραμμένη γωνία AOB είναι ορθή, άρα η AB είναι διάμετρος και το κέντρο του κύκλου $\left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$ ανήκει στην ευθεία.

Συνεπώς, $\lambda = 3\frac{\lambda}{2} + 1 \Longrightarrow \lambda = -2$

Β΄ Λύση:

Ο κύκλος διέρχεται από το $(0,0)$, άρα $\kappa = 1$.

Η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται. Η εξίσωση του συστήματός του κύκλου και της ευθείας $y = 3x + 1 \quad (\mathbf{1})$ είναι

$$\varphi(x) = x^2 + (3x+1)^2 - \lambda x - 2\lambda(3x+1) + 1 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = x^2 + 9x^2 + 6x + 1 - \lambda x - 6\lambda x - 2\lambda = 0$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = 10x^2 + (6 - 7\lambda)x + 1 - 2\lambda = 0 \qquad (\mathbf{2})$$

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ οι συντεταγμένες των A και B.

Αφού AOB ορθή γωνία, τότε AB διάμετρος του κύκλου και επομένως,

$$K = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Τότε, από την (2) προκύπτει,

$$x_1 + x_2 = -\frac{6 - 7\lambda}{10}$$

Και από την (1),

$$y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) + 2 = \frac{21\lambda + 2}{10}$$

Επομένως,

$$K = \left(\frac{7\lambda - 6}{20}, \frac{21\lambda + 2}{20}\right)$$

Από την (1), $K = (-g, -f) = \left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

Άρα,

$$\frac{7\lambda - 6}{20} = \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow 7\lambda - 6 = 10\lambda \Longrightarrow 3\lambda = -6 \Longrightarrow \lambda = -2$$

A9	Δίνεται η λέξη «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ». **α)** Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης **(1μ)** **β)** Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με τη λέξη «ΑΞΙΟΣ». **(2μ)** **γ)** Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ» στους οποίους το «Α» προηγείται του «Λ» και το «Λ» προηγείται του «Σ». **(2μ)** **Λύση** **α)** $M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{2!\cdot 2!} = 907200$ αναγραμματισμοί. **β)** Στο υπόλοιπο μέρος των αναγραμματισμών (μετά το «ΑΞΙΟΣ») έχουμε μεταθέσεις των 5 γραμμάτων **Λ, Ο, Γ, Η, Η**, με επανάληψη, δηλαδή οι αναγραμματισμοί αυτοί είναι $$M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$$ **γ) Α΄ τρόπος** Οι μεταθέσεις (αναγραμματισμοί) των 3 γραμμάτων **Α, Λ, Σ** είναι $M_3 = 3!$ Όμως μας ενδιαφέρει μόνο μια περίπτωση και συνεπώς οι ζητούμενοι αναγραμματισμοί είναι $$\frac{M_{10}^{\varepsilon}}{M_3} = \frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!} = 151200$$ **Β΄ τρόπος** Σε πρώτη φάση επιλέγουμε 3 από τις 10 θέσεις κατά $\binom{10}{3}$ τρόπους και τοποθετούμε τα γράμματα **Α, Λ, Σ** με αυτή την διάταξη. Σε δεύτερη φάση τοποθετούμε τα υπόλοιπα 7 γράμματα **Ξ, Ι, Γ, Ο, Ο, Η, Η** στις 7 θέσεις που έμειναν κατά M_7^{ε} τρόπους Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή, οι ζητούμενοι αναγραμματισμοί είναι $$\binom{10}{3}\cdot M_7^{\varepsilon} = \frac{10!}{7!\cdot 3!}\cdot\frac{7!}{2!\cdot 2!} = \frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!} = 151200$$
A10	Έστω το ολοκλήρωμα $$I(x) = \int_0^x t^2\cdot e^{-t}dt\ ,\ \text{με } x>0$$ **α)** Να αποδείξετε ότι **(3μ)** $$I(x) = 2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}$$ **β)** Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$ **(2μ)** **Λύση**

	α) $I(x)=\int_0^x t^2\cdot e^{-t}dt\ =[-t^2e^{-t}]_0^x+2\int_0^x \mathrm{t}\cdot e^{-t}dt$ $=-x^2e^{-x}-2[te^{-t}]_0^x+2\int_0^x e^{-t}dt$ $=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2[e^{-t}]_0^x$ $=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+2$ $=2-e^{-x}\cdot(x^2+2x+2)=2-\frac{x^2+2x+2}{e^x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}I(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{x^2+2x+2}{e^x}\right)=2-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{e^x}\right)$ **(1)** Παρατηρώ ότι για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{e^x}\right)$ Είναι, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(x^2+2x+2)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}e^x=+\infty$ Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος De L' Hospital $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{e^x}\right)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(x^2+2x+2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x+2}{e^x}$$ Για το όριο $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x+2}{e^x}$ παρατηρώ ότι, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(2x+2)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}e^x=+\infty$ Και πάλι έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος De L' Hospital για τις παραγώγους $(2x+2)'$ και $(e^x)'$, οπότε $$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(2x+2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$ Συνεπώς, από την (1) έχουμε $$\lim_{x\to+\infty}I(x)=2-0=2$$

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Β1 Έστω η πραγματική συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R} - \{0\}$

Σημεία τομής με τους άξονες: $f(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4} \quad \left(\sqrt[3]{4}, 0\right)$

Δεν υπάρχει σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων.

Διαστήματα μονοτονίας:

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
f		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.

Ακρότατα:

Το $f(-2) = -3$ είναι τοπικό μέγιστο

Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

Η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στην περιοχή του $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στην περιοχή του $+\infty$

2^{ος} τρόπος

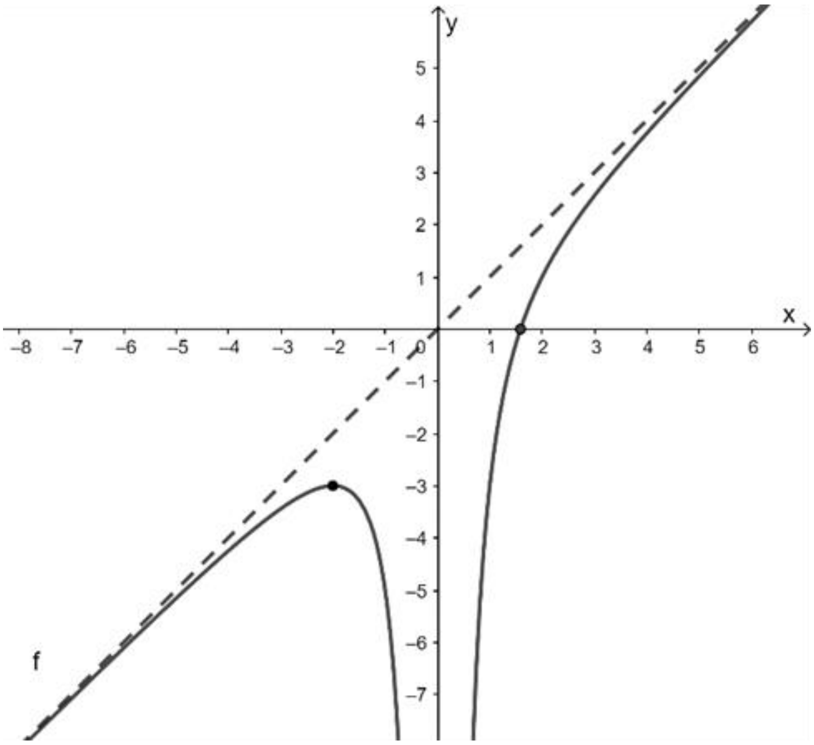
Για την ευθεία $y = x$ παρατηρώ ότι $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$

Άρα, από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στην περιοχή του $-\infty$.

Όμοια:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

Από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στην περιοχή του $+\infty$



B2 Δίνονται κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$ και τα σημεία του $A(0,R)$, $B(0,-R)$ και $T(R\sigma\upsilon\nu\theta, R\eta\mu\theta)$,με $0<\ \theta<\frac{\pi}{2}$. Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο T και είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Γ.

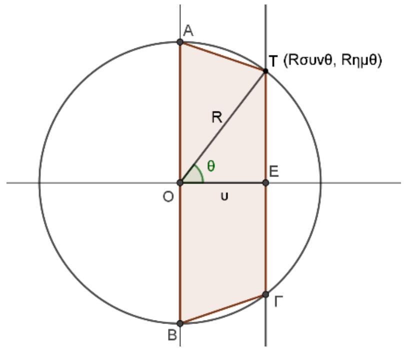
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AT\Gamma B$ είναι ίσο με

$$E=R^2\sigma\upsilon\nu\theta(1+\eta\mu\theta)$$

β) Να βρείτε την τιμή του θ έτσι ώστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου να είναι μέγιστο.

Λύση

(α)



Το τετράπλευρο $AT\Gamma B$ είναι τραπέζιο ($AB//T\Gamma$).

$\beta_1=2R$ και $\beta_2=2R\eta\mu\theta$

Το ύψος του τραπεζίου EO είναι, $\upsilon=R\sigma\upsilon\nu\theta$

Επομένως, το εμβαδόν είναι,

$$E=\frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}=\frac{(2R+2R\eta\mu\theta)R\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\Longrightarrow E=R^2\sigma\upsilon\nu\theta(1+\eta\mu\theta)$$

(β)

Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $E(\theta)$ έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο $0<\ \theta<\frac{\pi}{2}$. και

$$E'(\theta)=-R^2\eta\mu\theta(1+\eta\mu\theta)+R^2\sigma\upsilon\nu^2\theta=R^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta)-R^2\eta\mu\theta$$

$$\Longrightarrow E'(\theta)=R^2(\sigma\upsilon\nu2\theta-\eta\mu\theta)$$

Για μέγιστη ή ελάχιστη τιμή $E'(\theta)=0\Longrightarrow\sigma\upsilon\nu2\theta-\eta\mu\theta=0$

Επομένως, $\sigma\upsilon\nu2\theta=\eta\mu\theta\Longrightarrow\sigma\upsilon\nu2\theta=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις:

$$2\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\Longrightarrow3\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

η οποία έχει λύση στο $0<\ \theta<\frac{\pi}{2}$ την $\theta=\frac{\pi}{6}$ για $\kappa=0$

και $2\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}+\theta$ η οποία δεν έχει λύση στο $0<\ \theta<\frac{\pi}{2}$

Η τιμή της δεύτερης παραγώγου της $E(\theta)$ για $\theta=\frac{\pi}{6}$ είναι:

$$E''(\theta)=R^2(-2\eta\mu2\theta-\sigma\upsilon\nu\theta)\Longrightarrow E''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-R^2\left(2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)<0$$

Άρα η συνάρτηση $E(\theta)$ παίρνει μέγιστη τιμή στο $0<\ \theta<\frac{\pi}{2}$ όταν $\theta=\frac{\pi}{6}$.

B3	Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx$$

(3 μ)

β) Αν $g(x) = f(x) + f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx$$

(3 μ)

γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x\right)dx$$

(4 μ)

Λύση

α) $u = -x \Longrightarrow dx = -du$

x	u
$-\alpha$	α
α	$-\alpha$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)(-du) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-u)du = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx$$

β) $f(x) + f(-x) = g(x)$

$$\Longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow 2\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx \Longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)\,dx$$

γ) Έστω

$$f(x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$g(x) = f(x) + f(-x) = \left[\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2+16} + \sigma\upsilon\nu 2x\right] + \left[\frac{-x^3 + \eta\mu^5 x}{x^2+16} + \sigma\upsilon\nu(-2x)\right]$$

$$= \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x - \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu 2x$$

Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sigma\upsilon\nu 2x\,dx = \left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

B4 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής. **(3μ)**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ είναι $x - 2y - 3 = 0$. **(3μ)**

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,16)$ ισχύει

$$x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln x^2$$ **(4μ)**

Λύση:

α) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{-4+\sqrt{x}}{4x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$

x	0		16		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖		ΣΚ		

Η f είναι κοίλη στο $(0, 16]$ και κυρτή στο $[16, +\infty)$

Το σημείο $M(16, 4\ln 2 - 4)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

β) $\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(1) = \frac{1}{2}$

Εξίσωση εφαπτομένης

$y - f(1) = \lambda_{\varepsilon\varphi} \cdot (x - 1) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$

γ) Επειδή στο διάστημα $(0,16]$ η συνάρτηση είναι κοίλη και η ευθεία $x - 2y - 3 = 0$ είναι εφαπτομένη, για κάθε $x \in (0,16)$, ισχύει

$y_{\varepsilon\varphi} \geq f(x) \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \geq \ln x - \sqrt{x} \Rightarrow x - 3 \geq 2ln x - 2\sqrt{x} \Rightarrow x + 2\sqrt{x} \geq 3 + ln x^2$

B5

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ και τυχαίο σημείο της $P(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

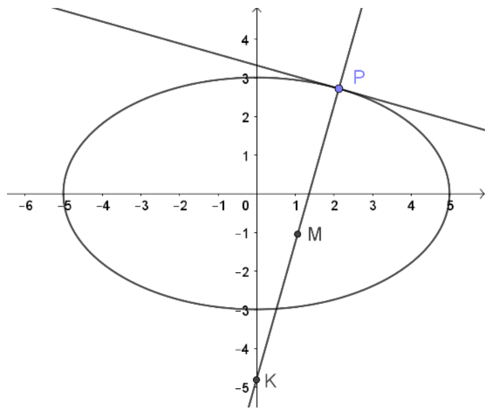
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο P είναι

$$5x\eta\mu\theta-3y\sigma\upsilon\nu\theta=16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$ **(3μ)**

β) Η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του PK είναι έλλειψη. **(4μ)**

γ) Αν E η εστία στον θετικό ημιάξονα και ε η εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, να αποδείξετε ότι $\frac{EK}{EP}=\varepsilon$. **(3μ)**

Λύση:



α) $\frac{2x}{25}+\frac{2y}{9}y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{9x}{25y}$

Επομένως,

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{3\sigma\upsilon\nu\theta}{5\eta\mu\theta} \Rightarrow \lambda_{\kappa}=\frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\nu\theta}$ και η εξίσωση της κάθετης είναι,

$$y-3\eta\mu\theta=\frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\nu\theta}(x-5\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow$$

$3y\sigma\upsilon\nu\theta-9\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=5x\,\eta\mu\theta-25\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

$\Rightarrow 5x\eta\mu\theta-3y\sigma\upsilon\nu\theta=16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

β) $y_{\kappa}=0 \Rightarrow 5x_{\kappa}\eta\mu\theta=16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x_{\kappa}=\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta$

$K\left(\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta, 0\right)$ επομένως,

$$x_M=\frac{\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta+5\sigma\upsilon\nu\theta}{2}=\frac{41}{10}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{10}{41}\,x_M$$

και

$$y_M=\frac{0+3\eta\mu\theta}{2} \Rightarrow \eta\mu\theta=\frac{2}{3}y_M$$

Τότε,

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 y_M^2+\left(\frac{10}{41}\right)^2 x_M^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{41}{10}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$

Άρα η εξίσωση της καμπύλης, στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος PK είναι έλλειψη.

γ) Γνωρίζουμε ότι $\gamma^2=5^2-3^2=16$ και $\varepsilon=\frac{4}{5}$

$E(4{,}0), K\left(\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta, 0\right)$, $P(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$

$(EK)=\left|4-\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta\right|=4\left|1-\frac{4}{5}\sigma\upsilon\nu\theta\right|=4(1-\frac{4}{5}\sigma\upsilon\nu\theta)$

$(EP)=a-\varepsilon x_P=5-\frac{4}{5}5\sigma\upsilon\nu\theta=5(1-\frac{4}{5}\sigma\upsilon\nu\theta)$

$$\Rightarrow \frac{(EK)}{(EP)}=\frac{4(1-\frac{4}{5}\sigma\upsilon\nu\theta)}{5(1-\frac{4}{5}\sigma\upsilon\nu\theta)}=\frac{4}{5}=\varepsilon$$