ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή 31/5/2013
8:00 – 11:00

<u>Λ Υ Σ Ε Ι Σ</u>

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄:</u> Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται κύλινδρος με ακτίνα βάσης $5\,cm$. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι τριπλάσιο της ακτίνας της βάσης του, να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.

Λύση:

$R = 5\,cm$

$\upsilon = 3R = 3 \cdot 5 = 15\,cm$

$V = \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 375\pi\, cm^3$

2. Δίνεται η λέξη «Α Ν Α Κ Α Μ Ψ Η». Να βρείτε:
   a) το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
   b) πόσοι από τους αναγραμματισμούς αυτούς έχουν όλα τα σύμφωνά τους συνεχόμενα.

Λύση:

a) Α Ν Α Κ Α Μ Ψ Η   υπάρχουν 3 ίδια (3Α)

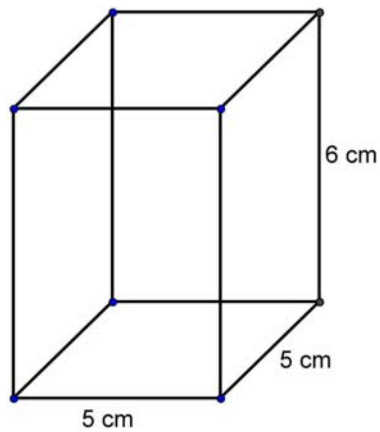
$$M_8^{\varepsilon} = \frac{8!}{3!} = \frac{40320}{6} = 6720$$

b) $\boxed{\text{Ν Κ Μ Ψ}}$ $\boxed{\text{Α}}$ $\boxed{\text{Α}}$ $\boxed{\text{Α}}$ $\boxed{\text{Η}}$ 5 ομάδες

$$M_5^{\varepsilon} \cdot M_4 = \frac{5!}{3!} \cdot 4! = \frac{120 \cdot 24}{6} = 480$$

3. Ορθό πρίσμα έχει ύψος 6 cm και βάση τετράγωνο πλευράς 5 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος.

Λύση:



$\alpha = 5\,\text{cm}$, $\upsilon = 6\,\text{cm}$

$$E_{\beta} = \alpha^2 = 5^2 = 25\,\text{cm}^2$$

$$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon = 4\alpha \cdot \upsilon = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120\,\text{cm}^2$$

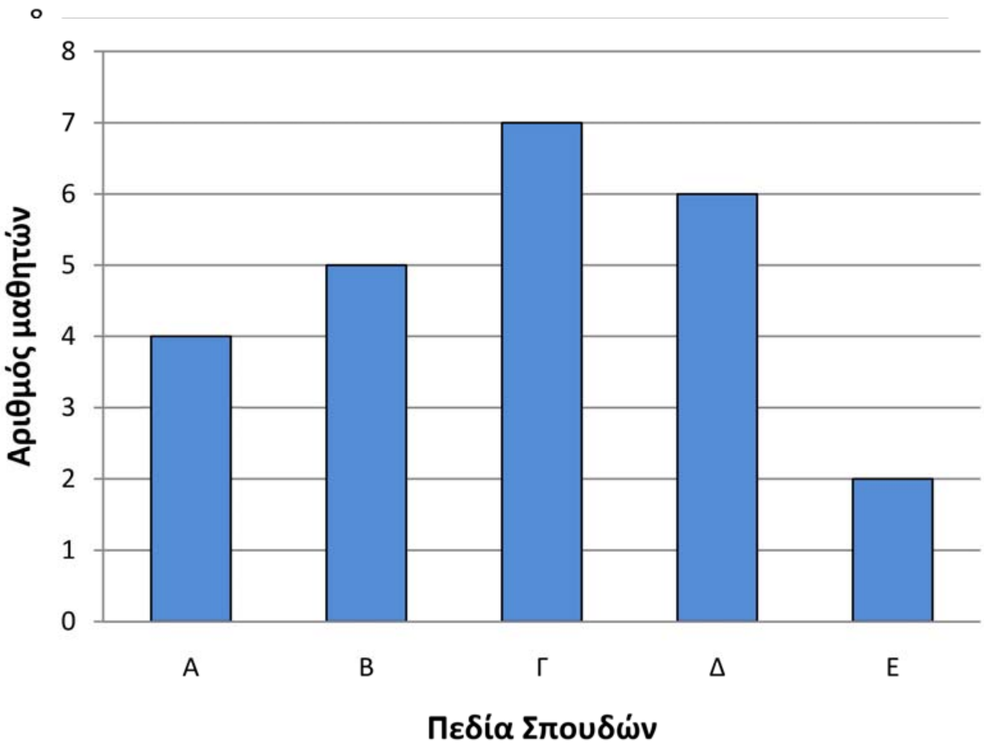
$$E_{o\lambda} = 2E_{\beta} + E_{\pi} = 2 \cdot 25 + 120 = 170\,\text{cm}^2$$

(β΄ τρόπος)

$\alpha = \beta = 5\,\text{cm}$ και $\gamma = 6\,\text{cm}$

$$E_{o\lambda} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 2(5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6) = 2(25 + 30 + 30) = 170\,\text{cm}^2$$

4. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζονται τα επιστημονικά πεδία σπουδών και το πλήθος των μαθητών που επέλεξαν το κάθε επιστημονικό πεδίο, σαν πρώτη επιλογή τους, τη σχολική χρονιά 2012 – 2013 , ενός τμήματος της Γ΄ Λυκείου.



a) Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του τμήματος.

b) Να βρείτε το ποσοστό $(\%)$ των μαθητών που επέλεξαν το πεδίο σπουδών Δ.

Λύση:

a) $4+5+7+6+2=24$ μαθητές

b) Το ποσοστό των μαθητών που επέλεξαν το πεδίο Δ είναι:

$$\frac{6}{24}=\frac{6}{24}100\%=25\%$$

5. Έμπορος αγόρασε εμπορεύματα αξίας €80000 με έκπτωση 30% πάνω στην αξία των εμπορευμάτων.
   a) Να βρείτε πόσα ευρώ κόστισαν τα εμπορεύματα.
   b) Πωλεί τα εμπορεύματα με κέρδος 20% πάνω στο κόστος αγοράς των εμπορευμάτων. Να βρείτε πόσα ευρώ κέρδισε.

Λύση:

a) Έκπτωση: $\frac{30}{100}\cdot 80000 = €24000$

Κόστος: $80000 - 24000 = €56000$

b) Κέρδος: $\frac{20}{100}\cdot 56000 = €11200$

6. Ο μέσος όρος της ηλικίας 10 παιδιών και 8 γονιών είναι 25 χρόνια. Αν ο μέσος όρος της ηλικίας των 8 γονιών είναι 40 χρόνια, να βρείτε:
   a) το μέσο όρο που έχουν οι ηλικίες των 10 παιδιών σήμερα, και
   b) το μέσο όρο που θα έχουν οι ηλικίες των γονιών μετά από 5 χρόνια.

Λύση:

a) $\overline{X}_{18} = 25$ χρόνια $\Rightarrow \sum_{18} = 18\cdot 25 = 450$

$\overline{X}_{8} = 40$ χρόνια $\Rightarrow \sum_{8} = 8\cdot 40 = 320$

$\Rightarrow \sum_{10} = 450 - 320 = 130$

$\Rightarrow \overline{X}_{10} = \frac{130}{10} = 13$ χρόνια.

b) Μετά από 5 χρόνια: $\overline{X}_{8} = 40 + 5 = 45$ χρόνια

7. Ένα κεφάλαιο τοκίζεται με απλό τόκο για δύο χρόνια ως εξής: τα $\frac{3}{7}$ του κεφαλαίου προς 5% και το υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου προς 4%. Αν ο συνολικός τόκος που θα αποδώσει το κεφάλαιο σε δύο χρόνια είναι $€620$, να βρείτε το κεφάλαιο.

Λύση:

$$K_1 = \frac{3}{7}K \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{4}{7}K$$

$$E_1 = 5\% \qquad E_2 = 4\%$$

$$X_1 = 2\,\chi\rho. \qquad X_2 = 2\,\chi\rho.$$

$$T_1 + T_2 = 620 \Rightarrow$$

$$\frac{K_1 \cdot E_1 \cdot X_1}{100} + \frac{K_2 \cdot E_2 \cdot X_2}{100} = 620 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{3}{7}K \cdot 5 \cdot 2}{100} + \frac{\frac{4}{7}K \cdot 4 \cdot 2}{100} = 620 \Rightarrow$$

$$\frac{30K}{7} + \frac{32K}{7} = 62000 \Rightarrow$$

$$62K = 7 \cdot 62000 \Rightarrow$$

$$K = €7000$$

8. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ιδίου δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B')=\frac{2}{3}$, $P(A-B)=\frac{2}{15}$.

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ και $P(\Omega)$.

Λύση:

$$P(B)=1-P(B')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)-P(A-B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{6+5-4}{15}=\frac{7}{15}$$

$$P(\Omega)=1$$

9. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $E = 384\,cm^2$ και το παράπλευρο ύψος της είναι ίσο με τα $\frac{5}{6}$ της ακμής της βάσης της.
   a) Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας είναι $\alpha = 12\,cm$.
   b) Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση:

$$h = \frac{5}{6}\alpha$$

$$E_{ολ} = E_{\beta} + E_{\pi}$$

$$\Rightarrow 384 = \alpha^2 + \frac{4\alpha \cdot h}{2}$$

$$\Rightarrow 384 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot \frac{5}{6}\alpha$$

$$\Rightarrow 384 = \alpha^2 + \frac{5}{3}\alpha^2$$

$$\Rightarrow \frac{8\alpha^2}{3} = 384$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{3 \cdot 384}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 144 \Rightarrow \alpha = 12\,cm$$

$$\Rightarrow h = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10\,cm$$

Π.Θ. $h^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \upsilon^2 \Rightarrow 100 = 36 + \upsilon^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 64 \Rightarrow \upsilon = 8\,cm$

$$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3} = \frac{12^2 \cdot 8}{3} = \frac{144 \cdot 8}{3} = 48 \cdot 8 = 384\,cm^3$$

10. Σε ένα δοχείο $Δ_1$ υπάρχουν 6 κόκκινες και 2 πράσινες μπάλες. Σε ένα άλλο δοχείο $Δ_2$ υπάρχουν 6 κόκκινες και μερικές άσπρες μπάλες.

a) Επιλέγω μια μπάλα από το δοχείο $Δ_1$. Να βρείτε τη πιθανότητα του ενδεχομένου Π: «η μπάλα είναι πράσινη».

b) Αν η πιθανότητα να επιλέξω μια άσπρη μπάλα από το δοχείο $Δ_2$ είναι διπλάσια της πιθανότητας να επιλέξω μια πράσινη μπάλα από το δοχείο $Δ_1$, να βρείτε πόσες είναι οι άσπρες μπάλες του δοχείου $Δ_2$.

Λύση:

a) $P(Π) = \dfrac{N(Π)}{N(Ω_1)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

b) Έστω ενδεχόμενο Α: επιλογή άσπρης μπάλας από $Δ_2$.

$$P(A) = 2 \cdot P(Π) \Rightarrow P(A) = 2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \dfrac{N(A)}{N(Ω_2)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{ν}{ν+6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2ν = ν + 6 \Rightarrow ν = 6$, όπου ν ο αριθμός των άσπρων μπαλών στο $Δ_2$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄:</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των ορθογραφικών λαθών που έκαναν οι μαθητές ενός Λυκείου σε μια έκθεση ιδεών.

Αριθμός λαθών (χ_i)	0	1	2	3	4	5	6
Αριθμός μαθητών (f_i)	9	9	20	17	15	10	10

Να βρείτε:

a) την επικρατούσα τιμή (χ_ε)

b) την διάμεσο της κατανομής (χ_δ)

c) τη μέση τιμή $(\overline{\chi})$ και

d) την τυπική απόκλιση (σ) των λαθών.

Λύση:

a) $\chi_\varepsilon = 2$

b) Οι μεσαίες τιμές είναι στην 45$^{\eta}$ και 46$^{\eta}$ θέση άρα $\chi_\delta = 3$

χ_i	f_i	$\chi_i f_i$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$f_i(\chi_i - \overline{\chi})^2$
0	**9**	**0**	**9**	**81**
1	**9**	**9**	**4**	**36**
2	**20**	**40**	**1**	**20**
3	**17**	**51**	**0**	**0**
4	**15**	**60**	**1**	**15**
5	**10**	**50**	**4**	**40**
6	**10**	**60**	**9**	**90**
Σ	**90**	**270**		**282**

c) $\overline{\chi} = \dfrac{270}{90} = 3$

d) $\sigma = \sqrt{\dfrac{282}{90}} \approx 1{,}77$

2. Μια εταιρεία κάλεσε σε συνέντευξη 8 άνδρες και 10 γυναίκες για την πλήρωση έξι κενών θέσεων εργασίας.

   Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η πλήρωση των θέσεων, αν:

   a) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

   b) θα προσληφθούν 3 άνδρες και 3 γυναίκες.

   c) θα προσληφθούν τουλάχιστον 4 άνδρες.

   d) θα προσληφθούν άτομα του ιδίου φύλου.

Λύση:

a) $\binom{18}{6} = 18564$

b) $\binom{8}{3} \cdot \binom{10}{3} = 56 \cdot 120 = 6720$

c) $\binom{8}{4} \cdot \binom{10}{2} + \binom{8}{5} \cdot \binom{10}{1} + \binom{8}{6} = 70 \cdot 45 + 56 \cdot 10 + 28 =$

$$= 3150 + 560 + 28 = 3738$$

d) $\binom{8}{6} + \binom{10}{6} = 28 + 210 = 238$

3. Ένα αυτοκίνητο αναχώρησε από την πόλη Α στις 6 το πρωί και κινείται προς την πόλη Β με σταθερή ταχύτητα $80\,km/h$. Διέτρεξε τα $\frac{5}{8}$ της απόστασης μεταξύ των δύο πόλεων σε 10 ώρες. Στην συνέχεια αύξησε την ταχύτητα του κατά 50% της αρχικής του ταχύτητας και κινήθηκε με αυτή την ταχύτητα μέχρι την πόλη Β. Να βρείτε την ώρα που έφτασε το αυτοκίνητο στην πόλη Β.

Λύση:

$$S_1 = U_1 t_1 = 80\frac{km}{h}\cdot 10h = 800km$$

$$S_1 = \frac{5}{8}\cdot S \Rightarrow 800km = \frac{5}{8}\cdot S \Rightarrow S = 1280km$$

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow 1280 = 800 + S_2 \Rightarrow S_2 = 480km$$

$$U_2 = 80km\cdot 150\% = 120\,km$$

$$S_2 = U_2 t_2 \Rightarrow 480 = 120\cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 4h$$

Άρα θα φτάσει στις 8:00 το βράδυ.

4. Τέσσερις τουρίστες φτάνουν σε μια πόλη που διαθέτει 5 ξενοδοχεία. Αν ο κάθε τουρίστας θα επιλέξει τυχαία το ξενοδοχείο στο οποίο θα διαμείνει, να βρείτε:
   a) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.
   b) την πιθανότητα όλοι οι τουρίστες να μείνουν στο ίδιο ξενοδοχείο.
   c) την πιθανότητα οι τουρίστες να μείνουν σε διαφορετικά ξενοδοχεία.

Λύση:

a)

Φάσεις	T1	T2	T3	T4
Τρόποι	5	5	5	5

$$N(\Omega) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \text{ τρόποι}$$

b) $N(B) = \binom{5}{1} = 5 \text{ τρόποι} \Rightarrow$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{5^4} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

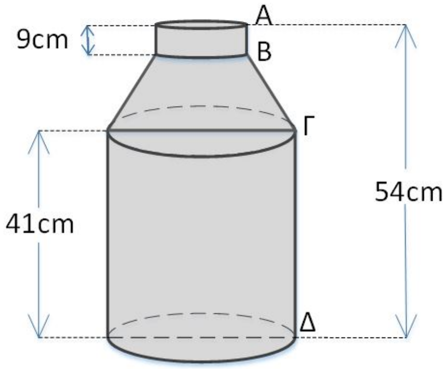
c)

Φάσεις	T1	T2	T3	T4
Τρόποι	5	4	3	2

$$N(\Gamma) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \quad \text{τρόποι}$$

Άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{120}{5^4} = \frac{120}{625} = \frac{24}{125}$

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα **ανοικτό** δοχείο μεταφοράς γάλακτος που αποτελείται από δύο κυλινδρικά τμήματα και ένα κόλουρο κώνο. Το ύψος του δοχείου είναι 54 cm και οι διάμετροι των βάσεων του κόλουρου κώνου είναι 30 cm και 24 cm. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν μήκη 9 cm και 41 cm αντίστοιχα.



Να υπολογίσετε:

a) το εμβαδόν της ολικής εξωτερικής επιφάνειας και

b) τον όγκο του δοχείου.

Λύση:

Ακτίνες βάσεων Κόλουρου Κώνου: $R = 15\,\text{cm}$ και $\rho = 12\,\text{cm}$

Ύψος Κόλουρου Κώνου: $\upsilon = 54 - (41 + 9) = 4\,\text{cm}$

Γενέτειρα Κόλουρου Κώνου:

$$(\text{ΒΓ})^2 \overset{\text{Πυθ. Θεωρ.}}{=} \lambda^2 = (R-\rho)^2 + \upsilon^2 = (15-12)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \lambda = 5\,\text{cm}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{ολ}} &= E_{\beta.\text{κυλ}1} + E_{\text{κ.κυλ}1} + E_{\text{κ.κολ.κων.}} + E_{\text{κκυλ}2} = \\
&= \pi \cdot R^2 + 2\pi \cdot R \cdot \upsilon_1 + \pi \cdot (R+\rho) \cdot \lambda + 2\pi \cdot \rho \cdot \upsilon_2 = \\
&= \pi \cdot 15^2 + 2\pi \cdot 15 \cdot 41 + \pi \cdot (15+12) \cdot 5 + 2\pi \cdot 12 \cdot 9 = \\
&= 225\pi + 1230\pi + 135\pi + 216\pi = 1806\pi\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= V_{\text{κυλ}1} + V_{\text{κκ}} + V_{\text{κυλ}2} = \\
&= \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon_1 + \frac{1}{3}\pi \cdot \upsilon \cdot \left(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2\right) + \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon_2 = \\
&= \pi \cdot 15^2 \cdot 41 + \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot \left(15^2 + 15 \cdot 12 + 12^2\right) + \pi \cdot 12^2 \cdot 9 = \\
&= 9225\pi + 732\pi + 1296\pi = 11253\pi\,\text{cm}^3
\end{aligned}$$

- - - - - - Τ Ε Λ Ο Σ - - - - - -