

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013**

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 30/5/2013**

**8:00 – 11:00**

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ**  
**Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο**  
**που αποτελείται από δυο (2) σελίδες.**

**ΜΕΡΟΣ Α΄** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα  $\int (x^4 - \eta\mu 3x + 5) dx$ .
2. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{e^x - 1}$ .
3. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης  $y = 4x^3 - 12x^2$ , αν υπάρχουν.
4. Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ , με  $\alpha > \beta > 0$ . Αν η εστιακή απόσταση  $EE' = 8$  μονάδες και η εκκεντρότητα της είναι  $\frac{4}{5}$ , να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  και του  $\beta$  και να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης.
5. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$ , για τις οποίες ισχύει  $A^2 - \kappa A + \lambda I = (0)$ , όπου  $I$  και  $(0)$  είναι ο μοναδιαίος και ο μηδενικός  $2 \times 2$  πίνακας αντίστοιχα.
6. Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5. Να βρείτε:  
(α) Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία αυτά αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.  
(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι άρτιοι.

7. Δίνεται η υπερβολή  $xy = 2$  και το σημείο της  $A(1,2)$ .
- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο σημείο A είναι  $x - 2y + 3 = 0$ .
- (β) Η κάθετη της υπερβολής στο σημείο A τέμνει ξανά την υπερβολή στο σημείο B. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την AB.
8. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ .
- (α) Να γράψετε πότε τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
- (β) Να αποδείξετε ότι  $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ .
9. Να υπολογίσετε:
- (α) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες  $y = \eta\mu x$ ,  $y = \sigma\upsilon\nu x$ , με  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ , και τον άξονα  $Oy$ .
- (β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα  $Ox$ .
10. Συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$ , με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $R$ , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x = 2$  και η καμπύλη της περνά από το σημείο  $A(0,1)$ . Αν ισχύει  $\int_0^2 (2f'(x) + xf''(x)) dx = 3$ , να υπολογίσετε το  $f(2)$ .

**ΜΕΡΟΣ Β'** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{x-2}{x^2+x-2}$ . Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.
2. Δίνεται η καμπύλη  $y = e^{-x}$  και σημείο της  $A(\kappa, \lambda)$ ,  $\kappa \geq 0$ .
- (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A.
- (β) Αν η εφαπτομένη στο σημείο A τέμνει τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$  σε σημεία B και Γ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το εμβαδόν  $E(\kappa)$  του τριγώνου  $OB\Gamma$  (O η αρχή των αξόνων) είναι  $E(\kappa) = \frac{1}{2} e^{-\kappa} (\kappa + 1)^2$ .
- (γ) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  έτσι ώστε το εμβαδόν  $E(\kappa)$  του τριγώνου  $OB\Gamma$  να είναι μέγιστο.

3. Έξι παντρεμένα ζευγάρια βρίσκονται σε μια αίθουσα. Επιλέγουμε τυχαία τέσσερα άτομα από αυτά. Να βρείτε:
- (α) Την πιθανότητα να επιλεγούν παντρεμένα ζευγάρια μόνο.  
 (β) Την πιθανότητα να μην επιλεγεί κανένα παντρεμένο ζευγάρι.  
 (γ) Την πιθανότητα να επιλεγεί ένα μόνο παντρεμένο ζευγάρι.
4. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  με εστία  $E$  και τυχαίο σημείο της  $A(t^2, 2t)$ ,  $t \neq 0$ . Φέρουμε ευθεία κάθετη στην  $AE$  στο σημείο  $E$ , η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο  $B$ .
- (α) Να δείξετε ότι η  $BA$  είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο  $A$ .  
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής  $\Gamma$  του ορθογωνίου παραλληλογράμμου  $AE\Gamma$ , καθώς το  $A$  κινείται πάνω στην παραβολή.
5. Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις  $f: R \rightarrow R$  και  $g: R \rightarrow R$ , τέτοιες ώστε  $f(x) + f(-x) = g(x)$ ,  $\forall x \in R$ .
- (α) Με τη βοήθεια της αντικατάστασης  $x = -u$  ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι  $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx$ .
- (β) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e\varphi^2 x}{1+3^x} dx$ .

----- Τ Ε Λ Ο Σ Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ -----