ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (κωδικός μαθήματος: 37)
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 30 Μαΐου 2013
8:00 – 11:00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int(x^4 - \text{ημ}3x + 5)dx$. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\int(x^4 - \text{ημ}3x + 5)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{\text{συν}3x}{3} + 5x + c$	
2.	Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\text{x}+\text{ημx}}{\text{e}^{\text{x}}-1}$ **<u>ΛΥΣΗ</u>** $\lim_{x\to 0}\frac{\text{x}+\text{ημx}}{\text{e}^{\text{x}}-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1+\text{συνx}}{\text{e}^{\text{x}}} = 2$	
3.	Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $y = 4x^3 - 12x^2$, αν υπάρχουν. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $y = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 12\chi^2 - 24\chi = 12\chi(\chi - 2)$ $\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \chi = 0 \quad \text{ή} \quad \chi = 2$	

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f΄(χ)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Για $x = 0 \Rightarrow \psi_{max} = 0 \Rightarrow (0{,}0)max$

Για $x = 2 \Rightarrow \psi_{min} = -16 \Rightarrow (2, -16)min$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x - 24 = 24(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

χ	$-\infty$		1		$+\infty$
f''(χ)		-	0	+	
		∩		∪	

Για $x = 1 \Longrightarrow \Psi_{\Sigma.K.} = -8 \Rightarrow (1, -8)\Sigma.K.$

4. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με α $>$ β $>$ 0. Αν η εστιακή απόσταση ΕΕ΄ $= 8$ μονάδες και η εκκεντρότητα της είναι $\frac{4}{5}$, να βρείτε τις τιμές του α και του β και να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης

ΛΥΣΗ

$$EE' = 8 \Rightarrow 2\gamma = 8 \Rightarrow \gamma = 4$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 5$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow 16 = 25 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = 9 \Rightarrow \beta = 3$$

Άρα $\frac{\chi^2}{25} + \frac{\psi^2}{9} = 1$

5.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των κ και λ, για τις οποίες ισχύει $A^2 - \kappa A + \lambda I = (0)$, όπου I και (0) είναι ο μοναδιαίος και ο μηδενικός 2×2 πίνακας αντίστοιχα.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^2 - \kappa\mathrm{A} + \lambda\mathrm{I} = (0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \kappa\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 11 + 3\kappa + \lambda & -3 - \kappa \\ -6 - 2\kappa & 2 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα: $-3 - \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = -3$

$-6 - 2\kappa = 0 \Rightarrow \kappa = -3$

$2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

$11 + 3\kappa + \lambda = 11 + 3(-3) - 2 = 0$

6.

Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5 . Να βρείτε:

(α) Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία αυτά αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι άρτιοι.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Φάσεις	Χ	Ε	Δ	Μ
Τρόποι	5	5	4	3

(α) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ τετραψήφιους αριθμούς

(β) (i) Αν 0 στις μονάδες:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$

(ii) Αν {2,4} στις μονάδες:

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

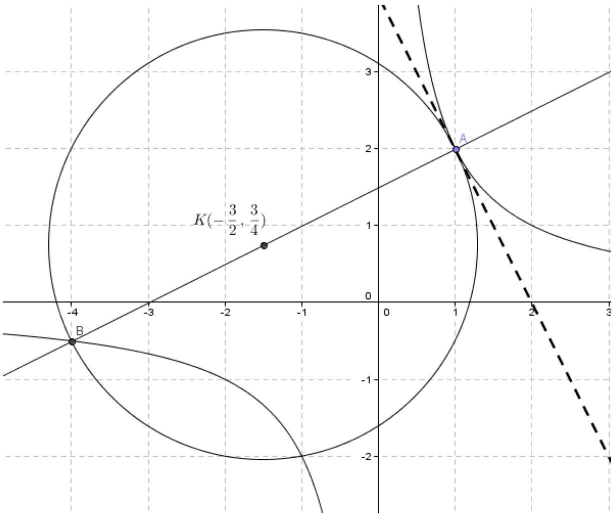
Σύνολο: 60+96=156 άρτιους αριθμούς

7. Δίνεται η υπερβολή $xy = 2$ και το σημείο της $A(1,2)$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο σημείο Α είναι $x - 2y + 3 = 0$.

(β) Η κάθετη της υπερβολής στο σημείο Α τέμνει ξανά την υπερβολή στο σημείο Β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την ΑΒ.

<u>ΛΥΣΗ</u>



(α) $xy = 2 \Rightarrow y' = -\dfrac{y}{x} \Rightarrow y'\big|_{(1,2)} = -2$

$\lambda_{\kappa\alpha\theta} = \dfrac{1}{2}$

$y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y - 4 = x - 1$

$\Rightarrow x - 2y + 3 = 0$

(β) $y = \dfrac{2}{x}$ $\qquad x - 2\dfrac{2}{x} + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 + 3x = 0 \Rightarrow (x+4)\cdot(x-1) = 0$

Άρα, $x_1 = -4$ και $x_2 = 1$

Επομένως, $B\left(-4, -\dfrac{1}{2}\right)$

Κέντρο κύκλου, $\mathrm{K}\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$

$$R = \sqrt{\left(1+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

Κύκλος: $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{125}{16} \Rightarrow x^2 + y^2 + 3x - \dfrac{3}{2}y - 5 = 0$

8.

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω.

(α) Να γράψετε πότε τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
(β) Να αποδείξετε ότι $P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

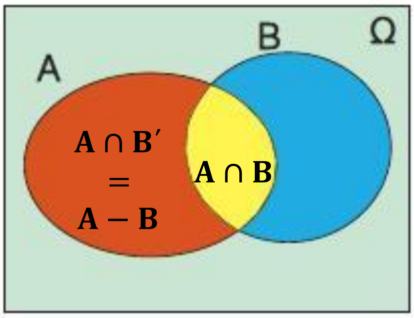
α) Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα αν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.

ή Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα αν $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ή Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα αν $P(A\cap B)=0$

ή Δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα αν $A\cap B=\varnothing$

β)



Α' τρόπος:

$A\cup B=(A-B)\cup B$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)$

$\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A-B)+P(B)$

$\Rightarrow P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

Β' τρόπος:

$(A\cap B')\cup(A\cap B)=A$

$\Rightarrow P\left[(A\cap B')\cup(A\cap B)\right]=P(A)$

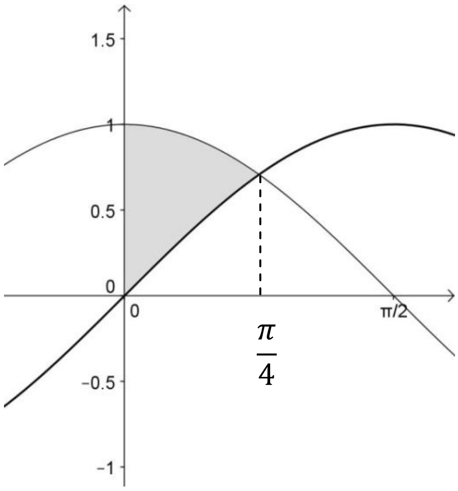
$\Rightarrow P(A\cap B')+P(A\cap B)=P(A)$ επειδή $(A\cap B')$ και $(A\cap B)$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

$\Rightarrow P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow \underbrace{P(A-B)=P(A\cap B')}_{\text{από το διάγραμμα πιο πάνω}}=P(A)-P(A\cap B)$

9.	Να υπολογίσετε: (α) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = ημx$, $y = συνx$, με $0 \leq x \leq \frac{π}{4}$, και τον άξονα Οy . (β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα Οx .	

ΛΥΣΗ



α) $ημχ = συνχ \Rightarrow χ = \frac{π}{4}$

$$E = \int_0^{\frac{π}{4}} (συνχ - ημχ)dx = [ημχ + συνχ]_0^{\frac{π}{4}} = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - (0 + 1) = (\sqrt{2} - 1) \text{τ.μ.}$$

$$V = π\int_0^{\frac{π}{4}} (συν^2χ - ημ^2χ)dx = π\int_0^{\frac{π}{4}} συν2x\, dx = \frac{π}{2}[ημ2χ]_0^{\frac{π}{4}} = \frac{π}{2}(1-0) = \frac{π}{2} \text{ κ.μ.}$$

10.	Συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η καμπύλη της περνά από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει $\int_0^2 \left(2f'(x) + xf''(x)\right)dx = 3$, να υπολογίσετε το $f(2)$. **<u>Λύση</u>** Από τα δεδομένα έχουμε : $f'(2) = 0$ και f(0)=1 $\int_0^2 [2f'(\chi) + \chi f''(\chi)]dx = 3$ $2\int_0^2 f'(\chi)dx + \int_0^2 \chi f''(\chi)dx = 3$ $2\int_0^2 f'(\chi)dx + \int_0^2 \chi d[f'(\chi)] = 3$ $2\left[f(\chi)\right]_0^2 + \left[\chi f'(\chi)\right]_0^2 - \int_0^2 f'(\chi)dx = 3$ $2\left[f(\chi)\right]_0^2 + \left[\chi f'(\chi)\right]_0^2 - \left[f(\chi)\right]_0^2 = 3$ $\left[f(\chi)\right]_0^2 + \left[\chi f'(\chi)\right]_0^2 = 3$ $f(2) - f(0) + 2f'(2) = 3$ $f(2) - 1 + 0 = 3$ $f(2) = 4$	

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x-2}{x^2+x-2}$ · Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

ΛΥΣΗ

$x \in \mathbb{R} - \{-2,1\}$

Για $x=0,\ y=1 \qquad (0,1)$

Και, για $y=0,\ x=2 \qquad (2,0)$

$$y' = \frac{x^2+x-2-(x-2)(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{-x^2+4x}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

Για $y'=0 \Rightarrow x=0$
$\qquad x=4$

Χ	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
f΄(χ)		-	‖	-	0	+	‖	+	0	-	
f(χ)		↘	‖	↘		↗	‖	↗		↘	
					min				max		

Για $x=0, \quad y=1 \qquad και \qquad για \quad x=4, \quad y=\frac{1}{9}$

$\min(0,1) \qquad και \qquad \max\left(4,\frac{1}{9}\right)$

Ασύμπτωτες:

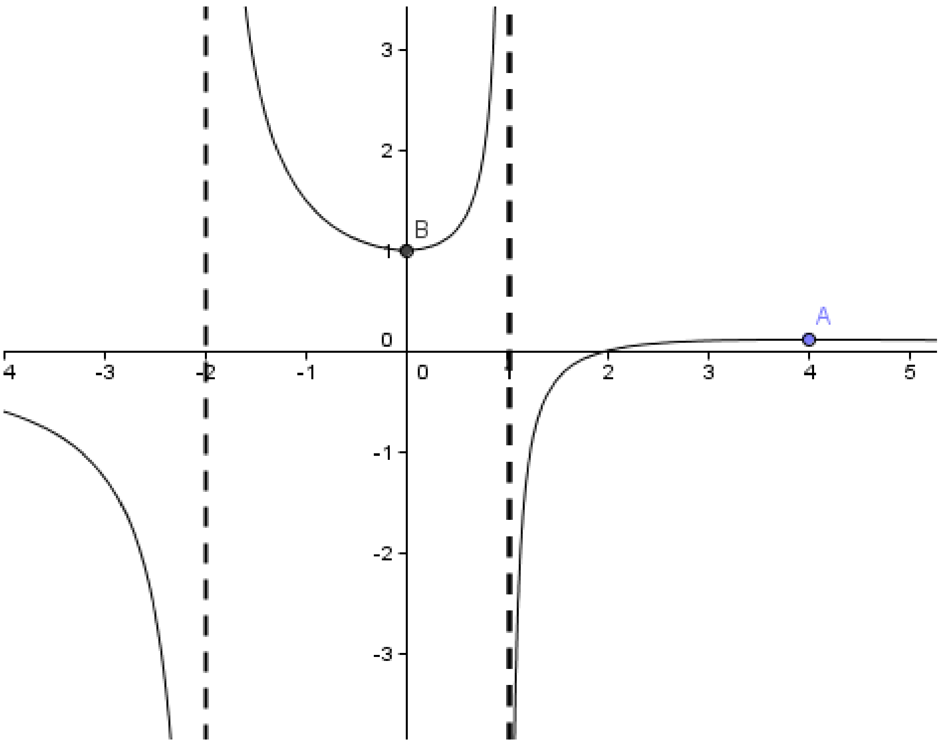
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}=0$$

άρα $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτος.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(x+1-\frac{2}{x}\right)}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\frac{-4}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\frac{-4}{0^-}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=-2\ K.A.$$

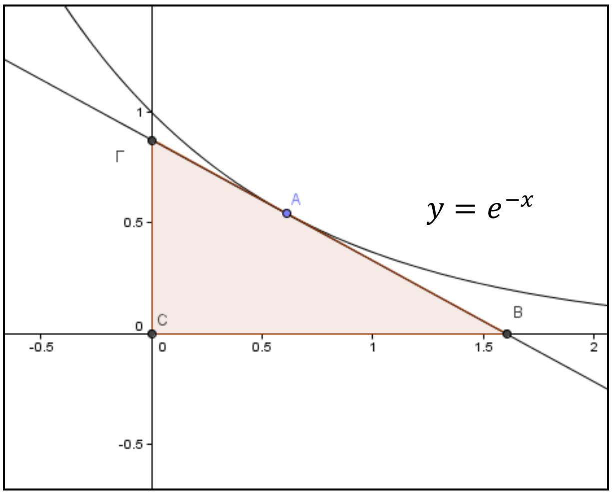
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-2}{x^2+x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=1\quad K.A.$$



2. Δίνεται η καμπύλη $y = e^{-x}$ και σημείο της Α(κ, λ) , κ ≥ 0.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α.
(β) Αν η εφαπτομένη στο σημείο Α τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε(κ) του τριγώνου ΟΒΓ (Ο η αρχή των αξόνων) είναι $\mathrm{E}(\kappa) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\kappa}(\kappa+1)^2$.
(γ) Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε το εμβαδόν Ε(κ) του τριγώνου ΟΒΓ να είναι μέγιστο.

<u>ΛΥΣΗ</u>



(α)

$y' = -e^{-x}$

$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -e^{-\kappa} \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda = e^{-\kappa}$

(Εφ): $y - e^{-\kappa} = -e^{-\kappa}(x-\kappa) \Rightarrow y + e^{-\kappa}x = e^{-\kappa}(1+\kappa)$

(β) Για $x=0 \quad y = e^{-\kappa}(1+\kappa) \qquad Ά\rho\alpha,\ \Gamma\left(0, e^{-\kappa}(1+\kappa)\right)$

Για $y=0 \quad x = (1+\kappa) \qquad Ά\rho\alpha,\ \mathrm{B}\left((1+\kappa), 0\right)$

Επομένως $\mathrm{E}_\kappa = \dfrac{1}{2}e^{-\kappa}(\kappa+1)^2$

(γ)

$$\mathrm{E}'_\kappa = -\frac{1}{2}e^{-\kappa}(\kappa+1)^2 + \frac{1}{2}e^{-\kappa}2(\kappa+1)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\kappa}(\kappa+1)(\kappa+1-2) = -\frac{1}{2}e^{-\kappa}(\kappa+1)(\kappa-1)$$

$$\mathrm{E}'_\kappa = 0 \Rightarrow \kappa = -1\ (\alpha\pi o\rho\rho i\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota) \quad ή \quad \kappa = 1$$

κ	0	1	+∞
E'_κ	+	0	-
	↗		↘

E_κ *μέγιστο όταν* $\kappa = 1$

3.	Έξι παντρεμένα ζευγάρια βρίσκονται σε μια αίθουσα. Επιλέγουμε τυχαία τέσσερα άτομα από αυτά. Να βρείτε: (α) Την πιθανότητα να επιλεγούν παντρεμένα ζευγάρια μόνο. (β) Την πιθανότητα να μην επιλεγεί κανένα παντρεμένο ζευγάρι. (γ) Την πιθανότητα να επιλεγεί ένα μόνο παντρεμένο ζευγάρι. **<u>ΛΥΣΗ</u>** (α) Έστω Α το ενδεχόμενο να επιλεγούν 2 παντρεμένα ζευγάρια. $P(A)=\dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{12}{4}}=\dfrac{1}{33}$ (β) Έστω Β το ενδεχόμενο να μην επιλεγεί παντρεμένο ζευγάρι. $P(B)=\dfrac{\binom{6}{4}2^4}{\binom{12}{4}}=\dfrac{16}{33}$ (γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο να επιλεγεί μόνο ένα παντρεμένο ζευγάρι. $P(\Gamma)=1-P(A)-P(B)=1-\dfrac{1}{33}-\dfrac{16}{33}=\dfrac{16}{33}$ Άλλοι τρόποι: (i) $P(\Gamma)=\dfrac{\binom{6}{1}\left[\binom{10}{2}-5\right]}{\binom{12}{4}}=\dfrac{16}{33}$ (ii) $P(\Gamma)=\dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}\cdot 2\cdot 2}{\binom{12}{4}}=\dfrac{16}{33}$ (iii) $P(\Gamma)=\dfrac{\binom{6}{1}\frac{1}{2}\binom{10}{1}\binom{8}{1}}{\binom{12}{4}}=\dfrac{16}{33}$	

4.

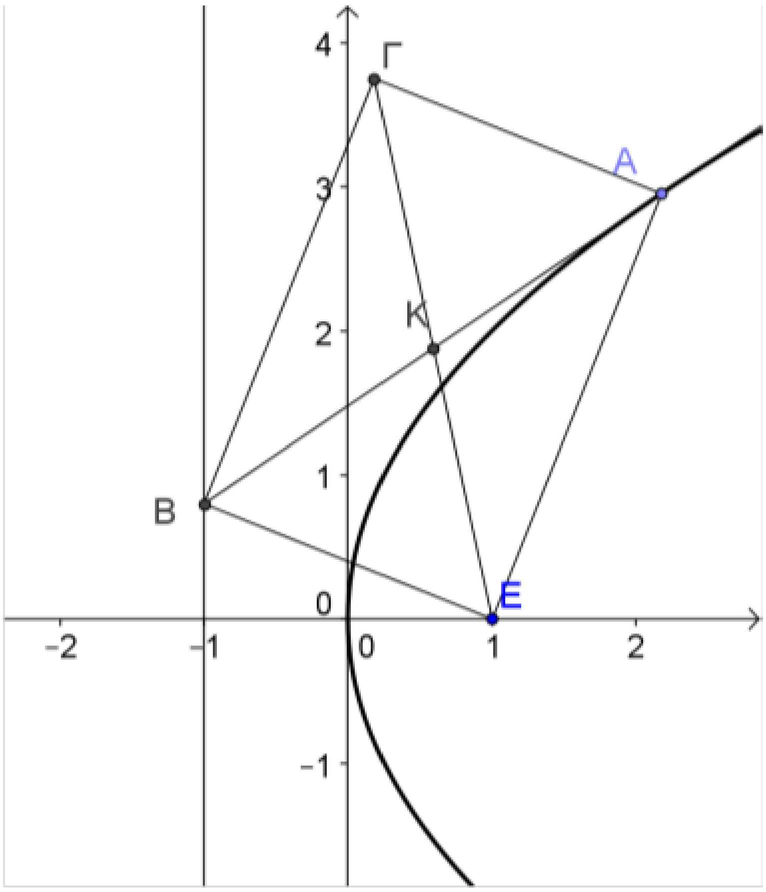
Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ με εστία Ε και τυχαίο σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t \neq 0$. Φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΕ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο Β .

(α) Να δείξετε ότι η ΒΑ είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΕΒΓ , καθώς το Α κινείται πάνω στην παραβολή.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α)



$$\lambda_{AE} = \frac{2t}{t^2 - 1} \Rightarrow \lambda_{BE} = -\frac{t^2 - 1}{2t}$$

$$\text{Εξίσωση BE}: \psi = -\frac{t^2 - 1}{2t}(\chi - 1)$$

$$\text{Για } \chi = -1 \Rightarrow \psi = -\frac{t^2 - 1}{2t}(-2) = \frac{t^2 - 1}{t} \Rightarrow B\left(-1, \frac{t^2 - 1}{t}\right)$$

$$\lambda_{AB} = \frac{2t - \frac{t^2 - 1}{t}}{t^2 + 1} = \frac{2t^2 - t^2 + 1}{t\left(t^2 + 1\right)} = \frac{t^2 + 1}{t\left(t^2 + 1\right)} = \frac{1}{t}$$

$$\psi^2 = 4\chi \Rightarrow 2\psi\frac{d\psi}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = \frac{2}{\psi}$$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

Άρα λ_{AB} = $\lambda_{\varepsilon\varphi\alpha\pi}$ και Α κοινό σημείο άρα ΑΒ είναι εφαπτομένη της παραβολής.

β) Έστω Κ μέσο της ΑΒ. Τότε:

$$\chi_\kappa = \frac{t^2-1}{2} \quad , \quad \psi_\kappa = \frac{\frac{t^2-1}{t} + 2t}{2} = \frac{3t^2-1}{2t}$$

Όμως Κ μέσο της ΕΓ

$$\chi_\kappa = \frac{\chi_\Gamma + \chi_E}{2} \Rightarrow \chi_\Gamma = 2\chi_K - \chi_E = t^2 - 1 - 1 = t^2 - 2$$

$$\psi_\kappa = \frac{\psi_\Gamma + \psi_E}{2} \Rightarrow \psi_\Gamma = 2\psi_K - \psi_E = \frac{3t^2-1}{t}$$

Άρα $t^2 = \chi + 2$

$$\Rightarrow \psi = \frac{3t^2-1}{t} \Rightarrow \psi^2 = \frac{(3t^2-1)^2}{t^2} \Rightarrow \psi^2 = \frac{[3(x+2)-1]^2}{\chi+2}$$

$$\Rightarrow \psi^2 = \frac{(3\chi+5)^2}{\chi+2} \text{ ο ζητούμενος Γ.Τ.}$$

5.	Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $f: R \to R$ και $g: R \to R$, τέτοιες ώστε $f(x) + f(-x) = g(x)$, $\forall x \in R$. (α) Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_0^a g(x)dx$. (β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{εφ^2 x}{1+3^x} dx$.	

ΛΥΣΗ

$$a) \int_{-a}^{a} f(\chi)dx = \int_{-a}^{0} f(\chi)dx + \int_{0}^{a} f(\chi)dx$$

$\chi = -u$

$d\chi = -du$

Γιά $\chi = -\alpha \Rightarrow u = a$

$\chi = 0 \Rightarrow u = 0$

$$Άρα \int_{-a}^{a} f(\chi)dx = -\int_{a}^{0} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(\chi)dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-\chi)d\chi + \int_{0}^{a} f(\chi)dx$$

$$= \int_{0}^{a} [\, f(-\chi) + f(\chi)]\, d\chi = \int_{0}^{a} g(\chi)dx$$

β) Έστω $f(\chi) = \frac{εφ^2\chi}{1+3^\chi}$

Τότε $f(-\chi) = \frac{εφ^2(-\chi)}{1+3^{-\chi}} = \frac{εφ^2\chi}{1+\frac{1}{3^\chi}} = \frac{εφ^2\chi}{\frac{3^\chi+1}{3^\chi}} = \frac{3^\chi εφ^2\chi}{3^\chi+1}$

$$f(\chi) + f(-\chi) = \frac{εφ^2\chi}{3^\chi+1} + \frac{3^\chi\, εφ^2\chi}{3^\chi+1} = \frac{(1+3^\chi)εφ^2\chi}{3^\chi+1} = εφ^2\chi = g(x)$$

$$Άρα\ \ I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{εφ^2 x}{1+3^x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} εφ^2\chi\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (τεμ^2\chi - 1)dx$$

$$= \left[εφ\chi - \chi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$