

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

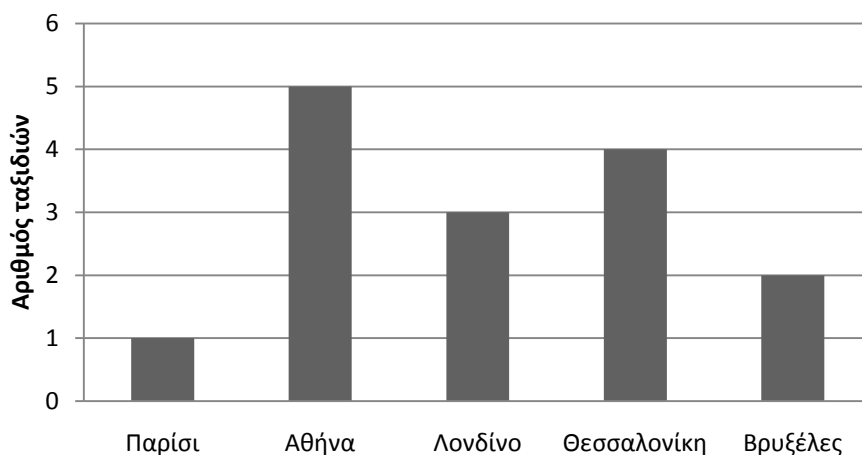
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 26 Μαΐου 2011  
7:30 – 10:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1.	Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών: 7, 9, 7, 5, 4, 5, 3, 8  <u>ΛΥΣΗ</u> $\bar{x} = \frac{7+9+7+5+4+5+3+8}{8}$ $\bar{x} = \frac{48}{8}$ $\bar{x} = 6$	
2.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 7$  <u>ΛΥΣΗ</u> $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$	

3. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα φαίνεται ο αριθμός των ταξιδιών που έχει κάνει ο Αβραάμ σε διάφορες Ευρωπαϊκές πόλεις.



Να βρείτε:

- (α) Πόσα ταξίδια έχει κάνει στο Λονδίνο.  
 (β) Σε ποια πόλη έχει κάνει τα περισσότερα ταξίδια.  
 (γ) Πόσα ταξίδια έχει κάνει συνολικά.

**ΛΥΣΗ**

- (α) 3 ταξίδια  
 (β) Στην Αθήνα  
 (γ)  $1+5+3+4+2=15$

4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$

**ΛΥΣΗ**

$K(-1,3)$

$R = \sqrt{16} = 4$

5. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ**.

**ΛΥΣΗ**

$M_{\varepsilon}^{\theta} = \frac{9!}{3!}$

$M_{\varepsilon}^{\theta} = 60480$

6.	<p>Να υπολογίσετε το όριο <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} =$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+3} =$ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	
7.	<p>Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα <math>\int_0^2 3x^2 dx</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> $\int_0^2 3x^2 dx = \left[ \frac{3x^3}{3} \right]_0^2 = \left[ x^3 \right]_0^2 =$ $2^3 - 0^3 = 8$	
8.	<p>Να βρείτε την παράγωγο <math>\frac{dy}{dx}</math> της συνάρτησης <math>y = x \cdot \sigma\upsilon\nu x</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> $\frac{dy}{dx} = (x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'$ $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu x + x \cdot (-\eta\mu x)$ $\frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$	

9.	<p>Αν <math>y = x + \eta\mu 2x</math> να δείξετε ότι <math>\frac{d^2y}{dx^2} + 4y - 4x = 0</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> $\frac{dy}{dx} = 1 + 2\sigma\upsilon\nu 2x$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\eta\mu 2x$ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y - 4x = -4\eta\mu 2x + 4x + 4\eta\mu 2x - 4x = 0$	
10.	<p>Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου <math>\Omega</math> με</p> $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{3} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ <p>(α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:</p> <p>i) <math>P(A')</math></p> <p>ii) <math>P(A \cup B)</math></p> <p>(β) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.</p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p>α) i) <math>P(A') = 1 - P(A)</math></p> $P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ <p>ii) <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math></p> $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ <p>β) <math>P(A \cap B) = \frac{1}{6}</math></p> $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ <p><math>P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A, B</math> ανεξάρτητα ενδεχόμενα</p>	

**ΜΕΡΟΣ Β΄:**

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει το ημερομίσθιο σε ευρώ των υπαλλήλων ενός εργοστασίου.

Ημερομίσθιο ( $x_i$ )	40	45	50	55	70	85
Αριθμός υπαλλήλων ( $f_i$ )	3	6	3	5	2	1

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή ( $x_\epsilon$ ).  
 (β) Τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ).  
 (γ) Την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ).

**ΛΥΣΗ**

$x_i$	$f_i$	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
40	3	120	-12	144	432
45	6	270	-7	49	294
50	3	150	-2	4	12
55	5	275	3	9	45
70	2	140	18	324	648
85	1	85	33	1089	1089
	20	1040			2520

α)  $x_\epsilon = 45$

β)  $\bar{x} = \frac{1040}{20} = 52$

γ)  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{2520}{20}} = \sqrt{126} \approx 11,22$

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

**ΛΥΣΗ**

(α) Πεδίο ορισμού:  $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$  Π.Ο.  $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

Αν  $x=0 \Rightarrow y = 0$

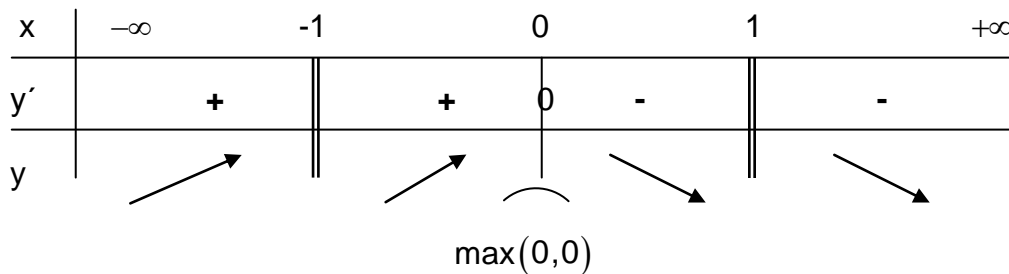
Αν  $y=0 \Rightarrow x = 0$

Τέμνει τους άξονες στο σημείο  $(0, 0)$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - (x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \quad x \neq \pm 1$$

$$y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$



δ) Ασύμπτωτες  
Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} &= \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} &= \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -1 \text{ Κ.Α.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow x=1$  K.A.

Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Κανόνας De L'Hospital

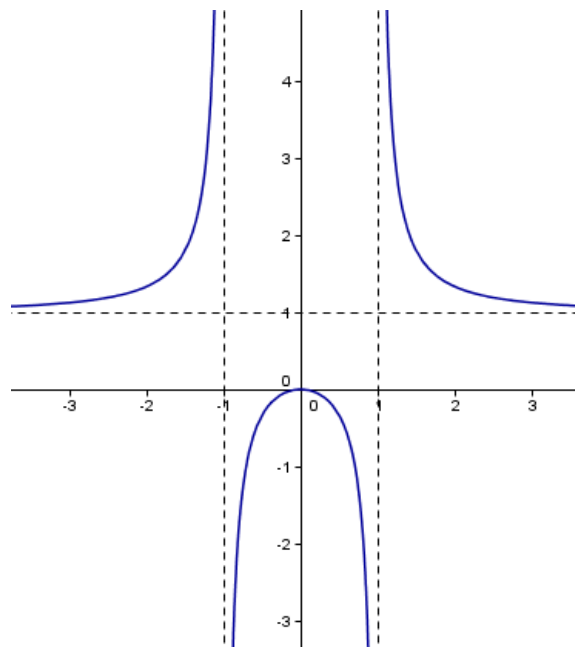
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Κανόνας De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$\Rightarrow y=1$  O.A.



3. Από ένα δοχείο που περιέχει 6 άσπρες και 4 κίτρινες μπάλες παίρνουμε τυχαία 2 μπάλες.

Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «και οι δύο μπάλες είναι άσπρες»

B: «η μία μπάλα είναι άσπρη και η άλλη κίτρινη»

Γ: «το πολύ μία μπάλα είναι κίτρινη»

### ΛΥΣΗ

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{0}}{\binom{10}{2}}$$

$$P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{1} \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}$$

$$P(B) = \frac{6 \cdot 4}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{0} + \binom{6}{1} \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}$$

$$P(\Gamma) = \frac{15 + 24}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15}$$



4. Η συνάρτηση με τύπο  $y = x^3 + \alpha x + 10$  έχει τοπικό ακρότατο στο  $x = 2$
- (α) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς  $\alpha$
- (β) Αν  $\alpha = -12$  να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο της με  $x = 3$

**ΛΥΣΗ**

(α)  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \alpha$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12$$

(β)  $y = x^3 - 12x + 10$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12$$

$$\lambda = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=3} = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15$$

$$\text{Για } x=3 \Rightarrow y = 3^3 - 12 \cdot 3 + 10 = 1 \quad A(3,1)$$

Εξ. Εφαπτομένης στο  $A(3,1)$

$$y - 1 = 15(x - 3) \Rightarrow$$

$$y = 15x - 44$$

5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση  $u = \sqrt{x-3}$  ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα  $\int 2x\sqrt{x-3} dx$

**ΛΥΣΗ**

$$u = \sqrt{x-3} \Rightarrow u^2 = x-3$$

$$x = u^2 + 3$$

$$dx = 2udu$$

$$\int 2x\sqrt{x-3} dx = \int 2(u^2 + 3) \cdot u \cdot 2udu =$$

$$= 4 \int (u^4 + 3u^2) du =$$

$$= \frac{4u^5}{5} + \frac{12u^3}{3} + c =$$

$$= \frac{4(\sqrt{x-3})^5}{5} + 4(\sqrt{x-3})^3 + c$$