**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ**
**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ**

**Μέρος Α΄:**

**Α1.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 = 0$ με λύσεις $x_1, x_2$. Να βρείτε το άθροισμα S και το γινόμενο P των λύσεων της.

**ΛΥΣΗ:**

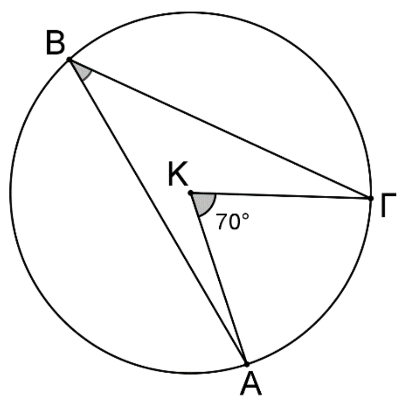
1 1 0,5

$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-4)}{1} = 4$

1 1 0,5

$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2}{1} = 2$

**Α2.** Στο πιο κάτω σχήμα το σημείο $K$ είναι το κέντρο του κύκλου και η γωνία $A\widehat{K}\Gamma$ έχει μέτρο $70^o$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.




**ΛΥΣΗ:**

3

$A\hat{B}\Gamma = 35^{\circ}$

(Θεώρημα εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας )

2 δικαιολογία

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς.
Να μεταφέρετε τις απαντήσεις στο τετράδιο απαντήσεων.

| | | |
|---|---|---|
| i. | Η τελική πλευρά της γωνίας $130^o$, σε κανονική θέση, βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| ii. | Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| iii. | Αν η τελική πλευρά της γωνίας $\theta$ είναι στο 1ο τεταρτημόριο, τότε $\eta\mu\theta < 0$ | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| iv. | Η συνάρτηση $f(x) = 4x - x^2$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| v. | Οι κύκλοι $(K, 3cm)$ και $(\Lambda, 5cm)$, με απόσταση $K\Lambda = 9cm$, εφάπτονται εξωτερικά | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |

**ΛΥΣΗ:**

5×1

**i)** ΣΩΣΤΟ **ii)** ΣΩΣΤΟ **iii)** ΛΑΘΟΣ **iv)** ΛΑΘΟΣ **v)** ΛΑΘΟΣ

**Α4.** Να λύσετε την ανίσωση: $2x^2 - 13x + 15 < 0$

**ΛΥΣΗ:**

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 169 - 120 = 49$ 0,5

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{13 \pm 7}{4}$ 0,5

$x_1 = 5 \qquad x_2 = \frac{3}{2}$ 0,5 +0,5

Κατασκευάζω πίνακα προσήμου

| x | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2 - 13x + 15$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

2

Άρα, $2x^2 - 13x + 15 < 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 1

(Αν δοθεί απάντηση $\boldsymbol{x} \in \left[\frac{3}{2}, 5\right]$ τότε 0,5 μονάδες.)

**Α5.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 3\lambda - 4 = 0$ Να βρείτε τις τιμές του $\lambda$, $\lambda \in R$, ώστε η εξίσωση να έχει:

(α) λύση τον αριθμό 5 (β) λύσεις αντίθετες

**ΛΥΣΗ:**

(α) $x = 5$ επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 3\lambda - 4 = 0$. Επομένως,

$$5^2 + (\lambda - 1)5 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 25 + 5\lambda - 5 + 3\lambda - 4 = 0$$ 1

$$\Leftrightarrow 8\lambda + 16 = 0$$ 0,5

$$\Leftrightarrow 8\lambda = -16$$ 0,5

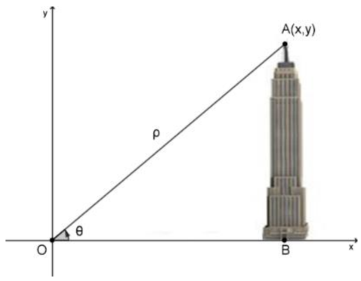
$$\Leftrightarrow \lambda = -2$$ 0,5

1

(β) $$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(\lambda - 1)}{1} = 0$$ 1

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$ 0,5

**Α6.** Το κτήριο, στο πιο κάτω σχήμα, έχει τοποθετηθεί σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, έτσι ώστε, το πιο ψηλό του σημείο να είναι το $A(x, y)$. Το σημείο $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων και $OA = \rho$.




(α) Να αντιστοιχίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της στήλης Α με την κατάλληλη σχέση στη στήλη Β. Να μεταφέρετε την αντιστοιχία στο τετράδιο απαντήσεων. (3 μον.)

| Α | |
|---|---|
| (α) | $\eta\mu\theta$ |
| (β) | $\sigma\upsilon\nu\theta$ |
| (γ) | $\varepsilon\varphi\theta$ |

| Β | |
|---|---|
| 1 | $\frac{x}{\rho}$ |
| 2 | $\frac{y}{\rho}$ |
| 3 | $\frac{y}{x}$ |

(β) Αν η γωνία $\hat{\theta} = 40^o$ και $x = 530m$ να υπολογίσετε το ύψος $y$, του κτηρίου. Να δώσετε την τελική σας απάντηση με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου. (2 μον.)

**ΛΥΣΗ:**

1 1 1

(α) $(\boldsymbol{\alpha}) \rightarrow \mathbf{2}$ $(\boldsymbol{\beta}) \rightarrow \mathbf{1}$ $(\boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \mathbf{3}$

(β) $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}$ 0,5

0,5 $\varepsilon\varphi 40° = \frac{y}{530}$ 0,5

$\Leftrightarrow y = 530 \cdot \varepsilon\varphi 40° = \mathbf{444,7}$ Το ύψος του κτηρίου είναι 444,7m 0,5

## Μέρος Β΄:

**Β1.** Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$.

Να βρείτε:

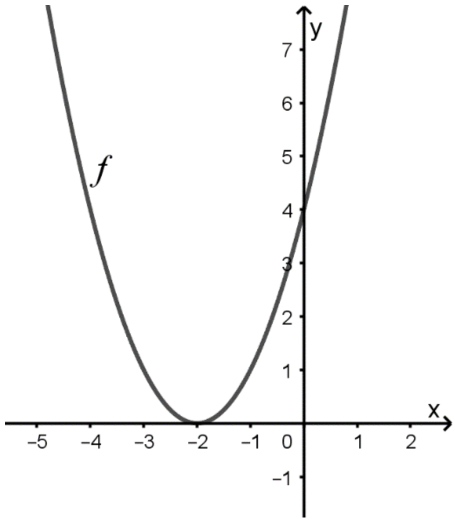
(α) το πρόσημο του $\alpha$

(β) την τιμή της διακρίνουσας Δ

(γ) τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της $f$

(δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

(ε) τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$




**ΛΥΣΗ:**

(α) το πρόσημο του $\alpha$

Θετικό ($a > 0$) 2

(β) την τιμή της διακρίνουσας Δ

Δ = 0 2

(γ) τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της $f$

Η ελάχιστη τιμή της $f$ είναι $y_{min} = f(-2) = 0$ 2

(δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

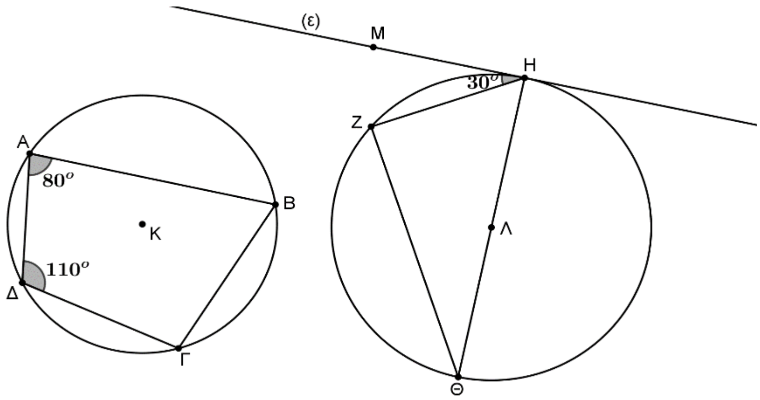
$x = -2$ 2

(ε) τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$x = -2$ ($\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}$) 2

**Β2.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται κύκλοι $(K, KA)$ και $(\Lambda, \Lambda H)$. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο $(K, KA)$. Το τρίγωνο $ZH\Theta$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο $(\Lambda, \Lambda H)$ και η ευθεία $(\varepsilon)$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(\Lambda, \Lambda H)$ στο σημείο $H$. Η γωνία $M\widehat{H}Z$ έχει μέτρο $30^o$ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να βρείτε:

(1) Τη θέση των δυο κύκλων $(K, KA)$ και $(\Lambda, \Lambda H)$ (3 μον.)
(2) Τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ (4 μον.)
(3) Τις γωνίες του τριγώνου $ZH\Theta$ (3 μον.)




**ΛΥΣΗ:**

2 1

(α) Οι δυο κύκλοι είναι **ξένοι εξωτερικά** μεταξύ τους

1

(β) $80^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ (Οι απέναντι γωνίες εγγεγραμμένου τετράπλευρου είναι παραπληρωματικές)

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\widehat{\Gamma} = 100^\circ}$ 1

1

$110^\circ + \widehat{B} = 180^\circ$ (Οι απέναντι γωνίες εγγεγραμμένου τετράπλευρου είναι παραπληρωματικές)

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\widehat{B} = 70^\circ}$ 1

0,5 + 0,5

(γ) $\boldsymbol{Z\widehat{\Theta}H = 30^\circ}$ (Θεώρημα Χορδής Εφαπτομένης)

$\boldsymbol{H\widehat{Z}\Theta = 90^\circ}$ (Γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο) 0,5 + 0,5

$Z\widehat{H}\Theta + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (Άθροισμα γωνιών τριγώνου) 0,5

$\Leftrightarrow \boldsymbol{Z\widehat{H}\Theta = 60^\circ}$ 0,5

**Β3.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} \text{ και } B=2\sigma\varphi x$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A=B$ (8 μον.)

(β) Αν η γωνία $x$ είναι οξεία, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$B+3\sigma\varphi(180°-x)$, δικαιολογώντας την απάντηση σας. (2 μον.)

**ΛΥΣΗ:**

(α) $A=\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ 1 1

$=\frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)}$ 1

$=\frac{\eta\mu x+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ 1 1

$=\frac{2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ 1 1

$=\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ 0,5

$=\boldsymbol{2\sigma\varphi x=B}$ 0,5

(β) $B+3\sigma\varphi(180°-x)$

$=2\sigma\varphi x-3\sigma\varphi x$ 1

$=\boldsymbol{-\sigma\varphi x}$ 0,5

Η παράσταση έχει πρόσημο αρνητικό γιατί η $\sigma\varphi x>0$ **,** αφού $x$ είναι οξεία (ή ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο) **,** και άρα $-\sigma\varphi x<0$ 0,5

**ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**