ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΑ ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΕΤΡΑΜΗΝΩΝ 2020-21
Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (Α΄ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : 90 λεπτά

ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 8 ασκήσεις. Να λύσετε <u>μόνο τις 6</u> ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1 Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2+3x-4=0$, χωρίς να τη λύσετε, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) x_1+x_2 *(1,5 μονάδες)*

β) $x_1 \cdot x_2$ *(1,5 μονάδες)*

γ) $\frac{4}{x_1}+\frac{4}{x_2}$ *(2 μονάδες)*

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

1 0,5

α) $x_1+x_2=S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{3}{2}$

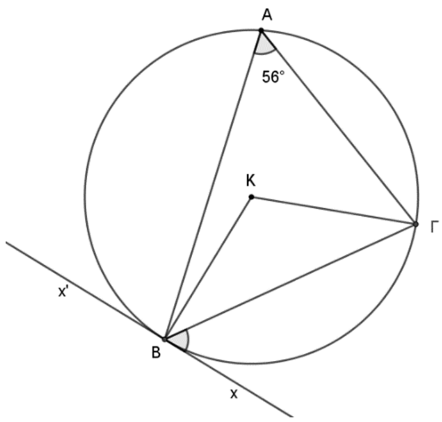
1+0,5

β) $x_1 \cdot x_2=P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=-\dfrac{4}{2}=-2$

4x0,5

γ) $\dfrac{4}{x_1}+\dfrac{4}{x_2}=\dfrac{4x_2+4x_1}{x_1 \cdot x_2}=\dfrac{4(x_1+x_2)}{x_1 \cdot x_2}=\dfrac{4S}{P}=\dfrac{4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3$

Α2 Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος (K,R). Η ευθεία $x'x$ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο B και η εγγεγραμμένη γωνία $BA\Gamma=56°$.



Να βρείτε το μέτρο:

α) της γωνίας $xB\Gamma$ *(2 μονάδες)*

β) των γωνιών του τριγώνου $BK\Gamma$ *(3 μονάδες)*

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

1,5

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

α) $x\hat{B}\Gamma=B\hat{A}\Gamma=56°$ (Θ.Χ.Ε.) 0,5 β) $B\widehat{K}\Gamma = 2 \cdot B\hat{A}\Gamma = 2 \cdot 56° = 112°$ (η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της αντίστοιχης εγγεγραμμένης γωνίας)

1+0,5

$BK\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο $(BK = \Gamma K = R)$ τότε $\Gamma\hat{B}K = K\hat{\Gamma}B = x$

$\Gamma\hat{B}K + B\widehat{K}\Gamma + K\hat{\Gamma}B = 180°$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

0,5

$x + 112° + x = 180°$

0,5

$2x = 180° - 112°$

$2x = 68°$

$x = 34° \Longrightarrow \Gamma\hat{B}K = K\hat{\Gamma}B = 34°$

0,5

Α3 Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

Προτεινόμενη λύση:

1+1

1

$$A'\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = \varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = B'\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$$

1

1

Α4 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 3)x + 3\lambda + 4 = 0,\ \lambda \in R$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.

Προτεινόμενη λύση:

1

Για να έχει η εξίσωση ρίζες πραγματικές και ίσες πρέπει $\Delta = 0$

$\Delta = 0 \Longrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Longrightarrow [-(\lambda + 3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3\lambda + 4) = 0$

1

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 - 12\lambda - 16 = 0$

0,5

$\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$

1,5

$(\lambda - 7) \cdot (\lambda + 1) = 0$

$\lambda = 7$ ή $\lambda = -1$

0,5+0,5

A5 Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(x^2+3x-4)\cdot(x-1)}{3x-6} > 0$$

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

$$\frac{(x^2+3x-4)\cdot(x-1)}{3x-6} > 0 \Longrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x+4)\cdot(x-1)}{3(x-2)} > 0 \Longrightarrow \frac{(x-1)^2\cdot(x+4)}{3(x-2)} > 0$$

0,5

Οι ρίζες του αριθμητή είναι οι αριθμοί -4 και 1 (διπλή ρίζα), ενώ το κλάσμα δεν ορίζεται για $x = 2$

0,5+0,5+0,5

x	$-\infty$		-4		1		2		$+\infty$
$\frac{(x^2+3x-4)\cdot(x-1)}{3x-6}$		+	0	−	0	−	‖	+	

2 μονάδες η ορθή κατασκευή του πίνακα
για κάθε λάθος να αφαιρείται 0,5μ

Επομένως,

$\frac{(x^2+3x-4)(x-1)}{3x-6} > 0$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

1

A6 Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$ και $90° < \theta < 180°$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{26\,\eta\mu\theta - 12\,\varepsilon\varphi\theta}{25\,\sigma\varphi\theta}$$

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta$ 0,5+0,5+0,5

$\Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$ τότε $\eta\mu\theta = \pm\frac{5}{13}$

Η τελική πλευρά της γωνίας θ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο

$(90° < \theta < 180°)$ άρα το $\eta\mu\theta > 0$ τότε $\boldsymbol{\eta\mu\theta} = +\mathbf{\frac{5}{13}}$ 0,5

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{-12}{13}} = -\frac{5}{12}$ τότε $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta} = -\mathbf{\frac{5}{12}}$ 0,5+0,5

$\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{\frac{-5}{12}} = -\frac{12}{5}$ τότε $\boldsymbol{\sigma\varphi\theta} = -\mathbf{\frac{12}{5}}$ 0,5+0,5

0,5+0,5

$A = \frac{26\eta\mu\theta - 12\varepsilon\varphi\theta}{25\sigma\varphi\theta} = \frac{26\cdot\frac{5}{13} - 12\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)}{25\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)} = \frac{10+5}{-60} = \frac{15}{-60} = -\frac{1}{4}$ τότε $\boldsymbol{A} = -\mathbf{\frac{1}{4}}$

Α7 Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό ή Λάθος** τους πιο κάτω ισχυρισμούς αιτιολογώντας πλήρως την απάντηση σας.

Α.	Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν οι γωνίες τους είναι ίσες μία προς μία.
Β.	Αν τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{3}, \kappa\right)$ και $B\left(\frac{7\pi}{3}, \lambda\right)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ τότε $\lambda = -\kappa$
Γ.	Η ευθεία (ε): $2x + y - 5 = 0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.
Δ.	Το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}, \frac{5}{7}\right)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.
Ε.	Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x^2 - 2\,\eta\mu\theta \cdot x - \sigma\upsilon\nu\theta = 0, \sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

5 x (0,5+0,5)

Προτεινόμενη λύση:

Α.	**Λάθος** Πρέπει και οι πλευρές τους να είναι ανάλογες.
Β.	**Λάθος** $y_B = \eta\mu\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \kappa$ τότε $\lambda = \kappa$
Γ.	**Λάθος** $\lambda = -2 \Longrightarrow \lambda = \varepsilon\varphi\theta \Longrightarrow \varepsilon\varphi\theta = -2 \Longrightarrow \theta$ αμβλεία γωνία.
Δ.	**Σωστό** $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{49} + \frac{25}{49}} = 1$
Ε.	**Σωστό** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\,\eta\mu\theta)^2 - 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta\ \cdot (-\sigma\upsilon\nu\theta)$ $= 4\eta\mu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta$ $= 4(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 4 > 0$

Α8 Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 6x + \lambda(6 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0,6)$$

Να βρείτε:

α) i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου *(1,5 μονάδες)*

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ *(1,5 μονάδες)*

β) για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο. *(2 μονάδες)*

0,5+0,5+0,5

Προτεινόμενη λύση:

α) i) $\Pi = 2 \cdot (x_1 + x_2) = 2 \cdot S = 2 \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{-6}{1}\right) = 2 \cdot 6 = 12$

τότε $\boldsymbol{\Pi = 12\ \mu}$

ii) $E = x_1 \cdot x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(6-\lambda)}{1} = \lambda(6 - \lambda) = -\lambda^2 + 6\lambda$

0,5+0,5+0,5

τότε $\boldsymbol{E = -\lambda^2 + 6\lambda}$

β) $E = -\lambda^2 + 6\lambda$ $\quad (\alpha = -1 < 0$ $\Longrightarrow$ το εμβαδόν παίρνει μέγιστη τιμή)

<u>1ος τρόπος</u>

Η εξίσωση του άξονα συμμετρίας ισούται:

$$\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3$$

2

Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $\lambda = 3$

<u>2ος τρόπος</u>

$E = -\lambda^2 + 6\lambda = -(\lambda - 3)^2 + 9$ $\quad$ (Συμπλήρωση τέλειου τετραγώνου)

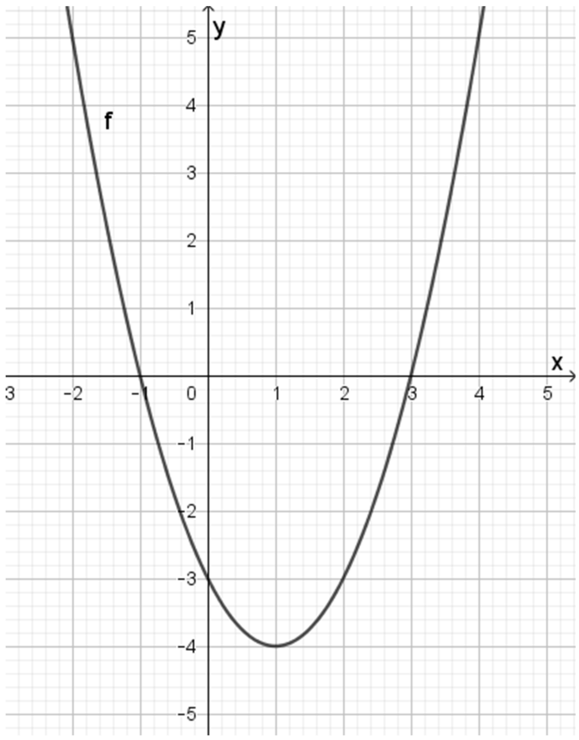
Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $\lambda = 3$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 4 ασκήσεις. Να λύσετε <u>μόνο τις 3</u> ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1 Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$.



Α) Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f *(1 μονάδα)*

β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής *(1 μονάδα)*

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής *(1 μονάδα)*

δ) το πρόσημο της διακρίνουσας *Δ* της εξίσωσης $f(x) = 0$ *(1,5 μονάδες)*

ε) τις λύσεις της:

i) εξίσωσης $f(x) = -3$ *(1 μονάδα)*

ii) ανίσωσης $f(x) \leq 0$ *(1,5 μονάδες)*

Β) Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) + 2$

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής της γραφικής παράστασης της g,

β) τις συντεταγμένες του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα των τεταγμένων.

(3 μονάδες)

Προτεινόμενη λύση:

α) Πεδίο ορισμού: R, Σύνολο τιμών: $[-4, +\infty)$ 0,5+0,5

β) Εξίσωση άξονα συμμετρίας: $x = 1$ 1

γ) Η κορυφή της παραβολής είναι: $K(1, -4)$ 1

δ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις $\Longrightarrow \Delta > 0$ 1,5

ε) $f(x) = -3 \Longrightarrow x_1 = 0$ και $x_2 = 2$ 1

ii) $f(x) \leq 0$ για $x \in [-1\,, 3]$ 1,5

στ) $g(x) = f(x) + 2$

1,5

i) Η γραφική παράσταση της g θα προκύψει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προς τα πάνω κατα 2 μονάδες. Αφού η παραβολή f έχει ελάχιστη τιμή $y = -4$ τότε η παραβολή g έχει ελάχιστη τιμή $y = -4 + 2 = -2$, άρα η κορυφή της έχει συντεταγμένες $K'(1, -2)$

ii) Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο $(0, -3)$, τότε οι συντεταγμένες του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα των τεταγμένων είναι $(\mathbf{0}, \mathbf{-1})$

1,5

B2 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, η πλευρά $B\Gamma$ έχει εξίσωση $x + 4y = 2$, το ύψος $B\Delta$ έχει εξίσωση $-2x + 3y = 7$ και το μέσο M της πλευράς $A\Gamma$ έχει συντεταμένες $M(4,2)$.

α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής B είναι $(-2,1)$. *(2 μονάδες)*

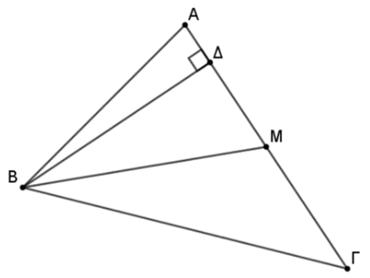
β) Να βρείτε:

i) την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$ *(3 μονάδες)*

ii) την απόσταση του σημείου M από την πλευρα $B\Gamma$ *(2 μονάδες)*

iii) τις συντεταγμένες της κορυφής Z, ώστε το $AB\Gamma Z$ να είναι παραλληλόγραμμο. *(3 μονάδες)*

Προτεινόμενη λύση:



$B\Gamma:\ \ x+4y=2$

$B\Delta:\ -2x+3y=7$

α) $$\left.\begin{array}{r} x+4y=2 \\ -2x+3y=7 \end{array}\right| \ 2 \ \left| \begin{array}{r} \cancel{2x}+8y=4 \\ \cancel{-2x}+3y=7 \\ \hline 11y=11 \ \Longrightarrow y=1 \end{array}\right.$$

1,5

$$x+4y=2 \ \Longrightarrow x+4=2 \Longrightarrow x=-2$$

0,5

Επομένως $\boldsymbol{B(-2,1)}$

β) i) $B\Delta:\ -2x+3y=7 \ \Longrightarrow \ \lambda_{B\Delta}=-\frac{A}{B}=-\frac{(-2)}{3}=\frac{2}{3}$

0,5+0,5+0,5

$\lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1$ ($B\Delta$ ύψος $\Longrightarrow B\Delta\perp A\Gamma$), επομένως $\boldsymbol{\lambda_{A\Gamma}=-\frac{3}{2}}$

$$\left.\begin{array}{r} M(4{,}2) \text{ και } \lambda_{A\Gamma}=-\frac{3}{2} \\ y-y_1=\lambda(x-x_1) \end{array}\right\} \Longrightarrow y-2=-\frac{3}{2}\cdot(x-4)$$

0,5+0,5

$$2y-4=-3x+12$$

0,5

$$\boldsymbol{A\Gamma:\ 3x+2y-16=0}$$

ii) $M(4{,}2)$ και $B\Gamma:\ \ x+4y-2=0$

$$d(M,B\Gamma)=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|1\cdot 4+4\cdot 2-2|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{17}}=\frac{10\sqrt{17}}{17}\mu$$

1+1

iii) Αν $AB\Gamma Z$ παραλληλόγραμμο τότε οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

0,5

Το $M(4{,}2)$ μέσο της $A\Gamma$ επομένως είναι μέσο και της BZ.

$$x_M=\frac{x_B+x_Z}{2} \ \Longrightarrow \ 4=\frac{-2+x_Z}{2} \Longrightarrow \ 8=-2+x_Z \Longrightarrow x_Z=10$$

1+1

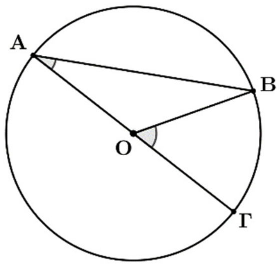
$$y_M=\frac{y_B+y_Z}{2} \ \Longrightarrow \ 2=\frac{1+y_Z}{2} \Longrightarrow \ 4=1+y_Z \Longrightarrow y_Z=3$$

$$\boldsymbol{Z(10,3)}$$

0,5

B3 α) Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $ΓAB$, κύκλου (O, ρ), ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $ΓOB$.

(3 μονάδες)



β) Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρνουμε το ύψος $AΔ$ του τριγώνου και τη διάμετρο του κύκλου AE.

Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα $ABΔ$ και $AΓE$ είναι όμοια. *(5 μονάδες)*

ii) $(AB) \cdot (AΓ) = (AE) \cdot (AΔ)$ *(2 μονάδες)*

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

α) $AO = BO = \rho$, τότε το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές και $\boldsymbol{O\hat{A}B = O\hat{B}A}$.

Η επίκεντρη γωνία $ΓOB$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου AOB.

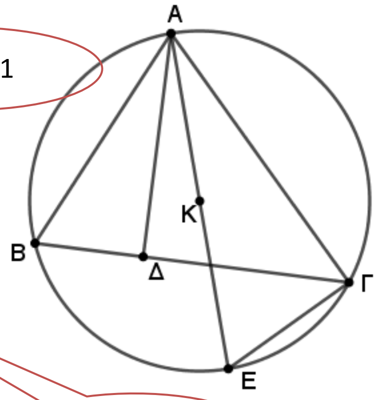
$\Rightarrow Γ\hat{O}B = O\hat{A}B + O\hat{B}A = 2 \cdot O\hat{A}B = 2Γ\hat{A}B$ (η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του)

$\Rightarrow Γ\hat{A}B = \frac{Γ\hat{O}B}{2}$

Άρα η εγγεγραμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

1+1+1

β) i) Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$



$\boldsymbol{Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Γ}Ε = 90°}$ 0,5+1+1

$\left(\begin{array}{l} Α\hat{Δ}Β = 90° \text{ γιατί } ΑΔ \text{ ύψος} \\ \text{και } Α\hat{Γ}Ε = 90° \text{ γιατί βαίνει σε ημικύκλιο} \end{array} \right)$

$\boldsymbol{Α\hat{Β}Γ = Α\hat{Ε}Γ}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο) 0,5+1

Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ είναι όμοια,

αφού έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες 1

Επομένως, $\overset{\triangle}{\boldsymbol{ΑΒΔ}} \approx \overset{\triangle}{\boldsymbol{ΑΕΓ}}$

ii) Από την ομοιότητα των τριγώνων $\boldsymbol{ΑΒΔ}$ και $\boldsymbol{ΑΕΓ}$ ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΕ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{ΒΔ}{ΕΓ} \Longrightarrow (ΑΒ)\cdot(ΑΓ) = (ΑΕ)\cdot(ΑΔ)$$ 1+1

Β4 Δίνονται οι παραστάσεις $Α$ και $Β$ με:

$Α = 1 - \frac{συν^2θ}{1+ημθ}$ και

$Β = 2εφ(π+θ)ημ\left(\frac{π}{2} - θ\right) + 2ημ(-θ) - τεμ(2π - θ)συν(π + θ)$

α) Να δείξετε ότι:

i) $Α = ημθ$ *(2 μονάδες)*

ii) $Β = 1$ (4 μονάδες)

β) i) Αν $x_1 = Α^2$ και $x_2 = -Β$ να δείξετε ότι η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τις x_1, x_2 είναι:

$$x^2 + συν^2θ \cdot x - ημ^2θ = 0$$

(3 μονάδες)

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $θ$, με $θ \in [0, π]$ η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες. *(1 μονάδα)*

Προτεινόμενη λύση:

α) i) $A = 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1+\eta\mu\theta} = \frac{1+\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1+\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu\theta+(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)}{1+\eta\mu\theta}$

4x0,5

$$= \frac{\eta\mu\theta+\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu\theta(1+\eta\mu\theta)}{1+\eta\mu\theta} = \eta\mu\theta$$

5 x 0,5

ii) $B = 2\varepsilon\varphi(\pi+\theta)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + 2\eta\mu(-\theta) - \tau\varepsilon\mu(2\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)$

$$= 2\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + 2(-\eta\mu\theta) - \tau\varepsilon\mu\theta \cdot (-\sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$= 2\,\frac{\eta\mu\theta}{\cancel{\sigma\upsilon\nu}\theta} \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu}\theta - 2\eta\mu\theta + 1 = 2\eta\mu\theta - 2\eta\mu\theta + 1 = 1$$

0,5+0,5+0,5

β) i) $x_1 = A^2 = \eta\mu^2\theta$

$x_2 = -B = -1$

1

$S = x_1 + x_2 = \eta\mu^2\theta - 1 = -(1-\eta\mu^2\theta) = -\sigma\upsilon\nu^2\theta$

$P = x_1 \cdot x_2 = -\eta\mu^2\theta$

0,5

$x^2 - Sx + P = 0 \Longrightarrow x^2 - (-\sigma\upsilon\nu^2\theta)\cdot x - \eta\mu^2\theta = 0$

0,5+0,5

$$x^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot x - \eta\mu^2\theta = 0$$

0,5

0,5+0,5

ii) Ρίζες αντίθετες $\Longrightarrow S = 0$

$$-\sigma\upsilon\nu^2\theta = 0 \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta \in [0,\pi]$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ