

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ (400)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : ΤΕΤΑΡΤΗ, 26 ΜΑΪΟΥ 2021

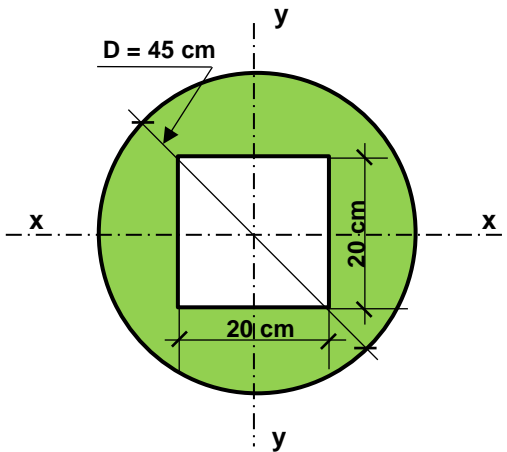
ΩΡΑ : 8:00 – 10:30

ΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από δώδεκα (12) ερωτήσεις

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με τέσσερις (4) μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης W_x , ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$ της σύνθετης διατομής, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1**.



ΣΧΗΜΑ 1

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot 45^4}{64} - \frac{20 \cdot 20^3}{12}$$

$$I_x = 201186,91 - 13333,33 = 187853,58 \text{ cm}^4$$

$$I_x = 187854 \text{ cm}^4$$

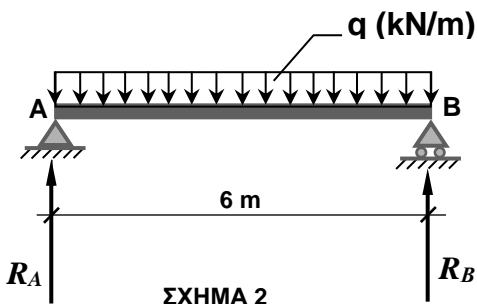
$$W_x = \frac{I_x}{y} = \frac{187854 \text{ cm}^4}{22,5 \text{ cm}}$$

$$W_x = \underline{8349,05 \text{ cm}^3}$$

2. Οι αντιδράσεις που αναπτύσσονται στη δοκό του **Σχήματος 2**, είναι $R_A=R_B=20 \text{ kN}$. Να υπολογίσετε:

(α) Το ομοιόμορφα καταμεμημένο φορτίο q (kN/m) που καταπονεί τη δοκό.

(β) Τη μέγιστη ροπή κάμψης M_{max} που έχουμε σε αυτήν.



(α)

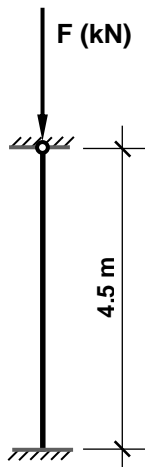
$$R_A = R_B = 20 \text{ kN} \rightarrow q \cdot 6 / 2 = 20 \text{ kN} \rightarrow q = 40 / 6 = \underline{6,67 \text{ kN/m}}$$

(β) Μέγιστη ροπή κάμψης

$$M_{max} = q \cdot l^2 / 8 = 6,67 \cdot 6^2 / 8 = 30 \text{ kNm}$$

$$\rightarrow M_{max} = \underline{30 \text{ kNm}}$$

3. Κολόνα κοίλης κυκλικής διατομής με εξωτερική διάμετρο $D=20\text{ cm}$ και εσωτερική διάμετρο $d=15\text{ cm}$, στηρίζεται όπως δείχνει το **Σχήμα 3** και μεταφέρει κεντρικά αξονικό φορτίο F . Να υπολογίσετε τη λυγιρότητα της ράβδου.



ΣΧΗΜΑ 3

Ελεύθερο μήκος λογισμού

$$\ell = 0,7 \cdot L = 0,7 \cdot 4,5\text{ m} = 3,15\text{ m} = 315\text{ cm}$$

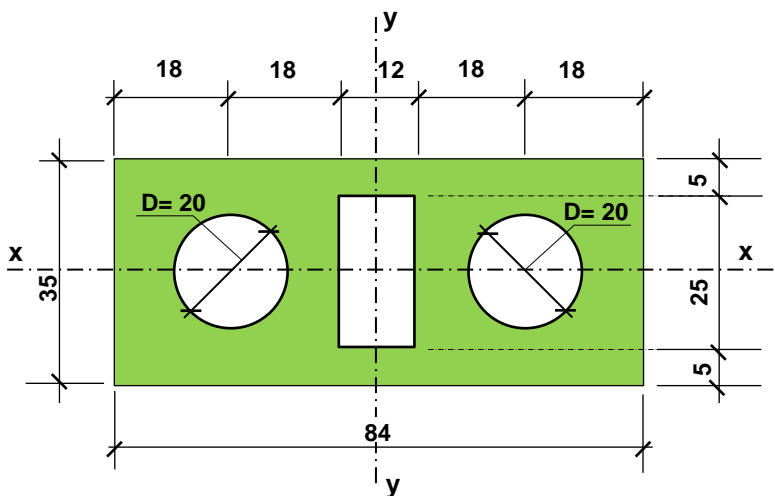
Ακτίνα αδράνειας

$$i = 0,25 \cdot \sqrt{20^2 + 15^2} = 6,25\text{ cm}$$

Λυγιρότητα

$$\lambda = \ell / i_{ελ} = 315 / 6,25 = \underline{50,4}$$

4. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας I_x , ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$ της διατομής του **Σχήματος 4**. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε εκατοστά.

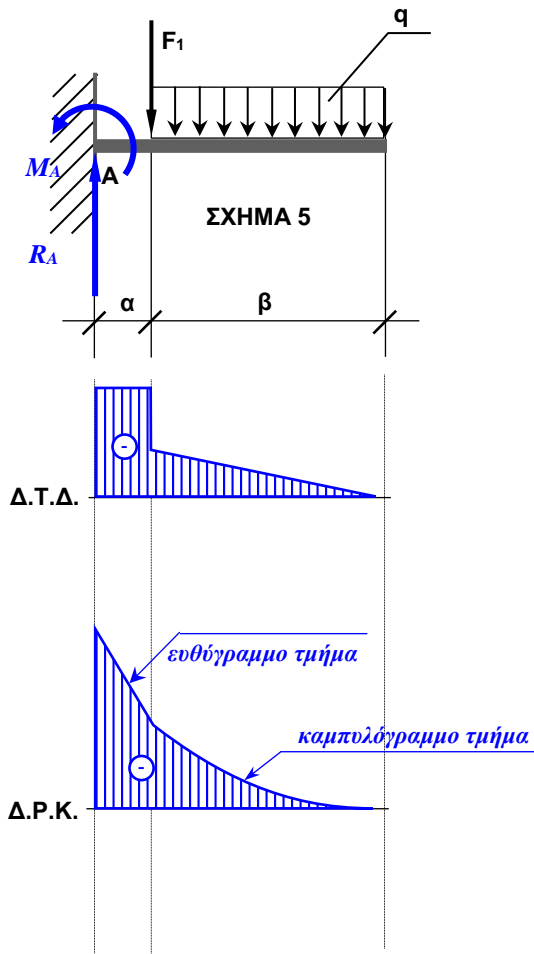


ΣΧΗΜΑ 4

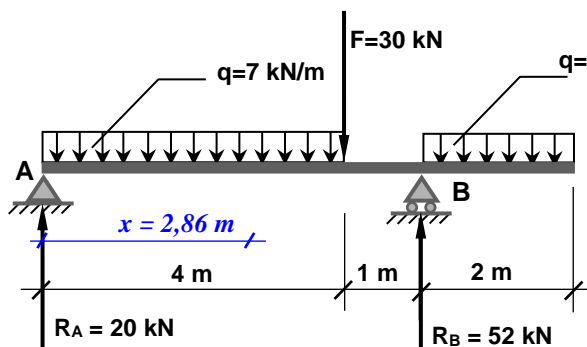
$$I_x = \frac{84 \cdot 35^3}{12} - \frac{12 \cdot 25^3}{12} - 2 \frac{\pi \cdot 20^4}{64} =$$

$$I_x = 300125 - 15625 - 15700 = \underline{268800\text{ cm}^4}$$

5. Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στη στήριξη A και από μια πιθανή λύση για τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης της δοκού προβόλου του **Σχήματος 5**.



6. Να υπολογίσετε τη θέση και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης, για τη δοκό που σας δίνεται στο **Σχήμα 6**.



ΣΧΗΜΑ 6

Θέση μέγιστης ροπής κάμψης

$$Q(x) = 0 \rightarrow R_A - q \cdot x = 0$$

$$20 - 7 \cdot x = 0 \rightarrow x = 20/7 \rightarrow x = 2,86 \text{ m}$$

Μέγιστη ροπή κάμψης

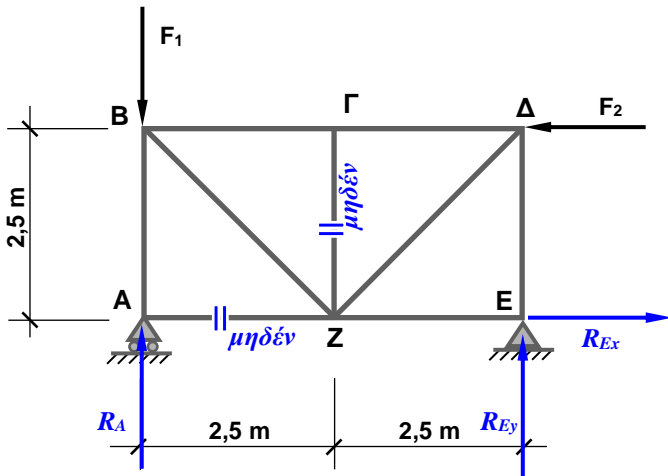
$$M_{max} = 20 \cdot 2,86 - 7 \cdot 2,86 \cdot 1,43 = \underline{28,57 \text{ kNm}}$$

$$\rightarrow M_{max} = \underline{28,57 \text{ kNm}}$$

7. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7**.

(α) Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **E**.

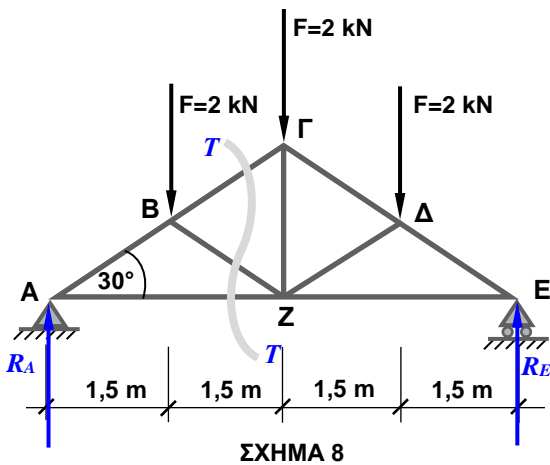
(β) Να κατονομάσετε τις ράβδους με μηδενική εσωτερική δύναμη.



Οι ράβδοι με μηδενική εσωτερική δύναμη είναι οι AZ και ZΓ

ΣΧΗΜΑ 7

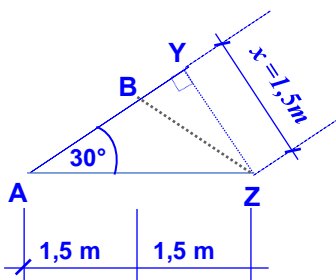
8. Να υπολογίσετε το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης και να καθορίσετε το είδος καταπόνησης που αναπτύσσεται στη ράβδο **BΓ** του δικτύωματος του **Σχήματος 8**, με τη μέθοδο των **ΤΟΜΩΝ**.



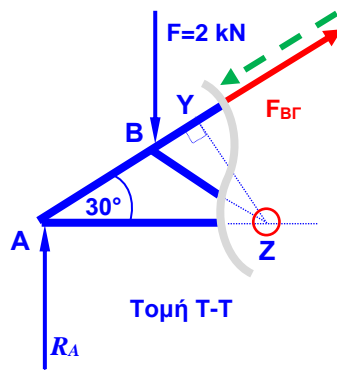
ΣΧΗΜΑ 8

Λόγω συμμετρίας

$$R_A = R_E = (2+2+2)/2 = 3 \text{ kN}$$



$$\begin{aligned} \text{Υπολογισμός } YZ = x \\ \eta\mu(30^\circ) = \frac{x}{AZ} = \frac{x}{3} \rightarrow \\ x = 3 \cdot 0,5 = 1,5\text{m} \end{aligned}$$



$$\Sigma M_Z = 0$$

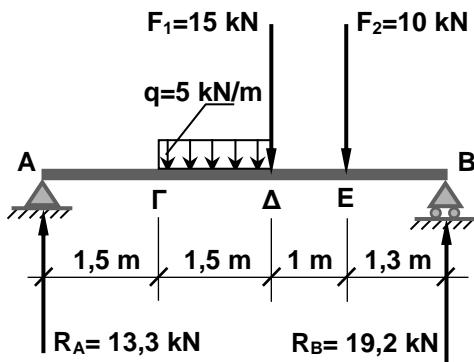
$$\rightarrow \Sigma M_Z = 3 \cdot R_A - 2 \cdot 1,5 + F_{B\Gamma} \cdot 3 \cdot \eta\mu 30^\circ$$

$$\rightarrow 1,5 \cdot F_{B\Gamma} = -6 \text{ kN}$$

$$\rightarrow F_{B\Gamma} = \underline{\underline{-4 \text{ kN}}}$$

Θλιβόμενη

9. Για τη δοκό που σας δίνεται στο **Σχήμα 9**, να υπολογίσετε την τέμνουσα δύναμη δεξιά του σημείου **E** ($Q_E^{\text{δεξ.}}$).



ΣΧΗΜΑ 9

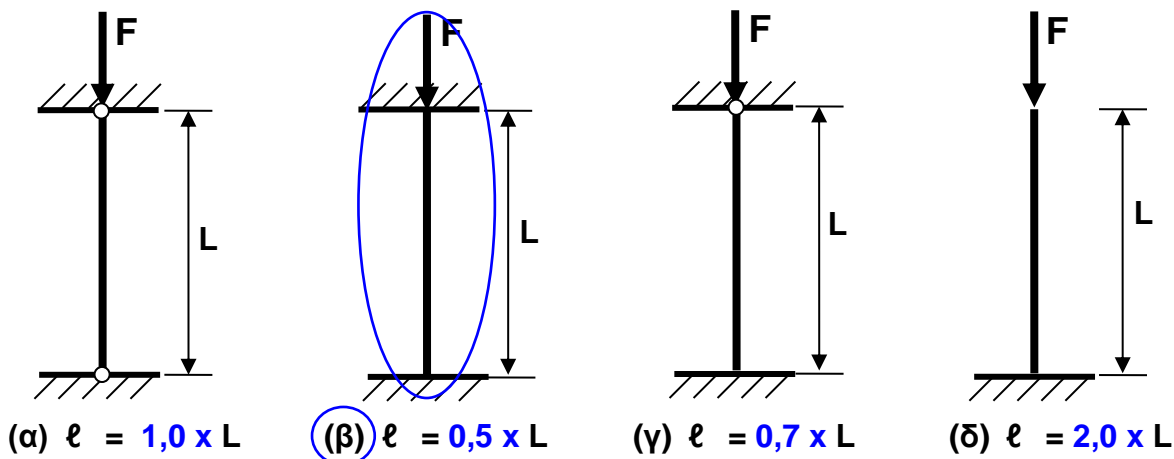
Τέμνουσα δύναμη δεξιά του σημείου E

$$Q_E^{\text{δεξ.}} = R_A - 5 \cdot 1,5 - 15 - 10 = 13,3 - 7,5 - 15 - 10 = \underline{\underline{-19,2 \text{ kN}}}$$

10. Στο **Σχήμα 10** δίνονται 4 περιπτώσεις στήριξης κολόνων που δέχονται το ίδιο αξονικό φορτίο **F**. Τόσο η διατομή όσο και το υλικό είναι τα ίδια για όλες τις περιπτώσεις.

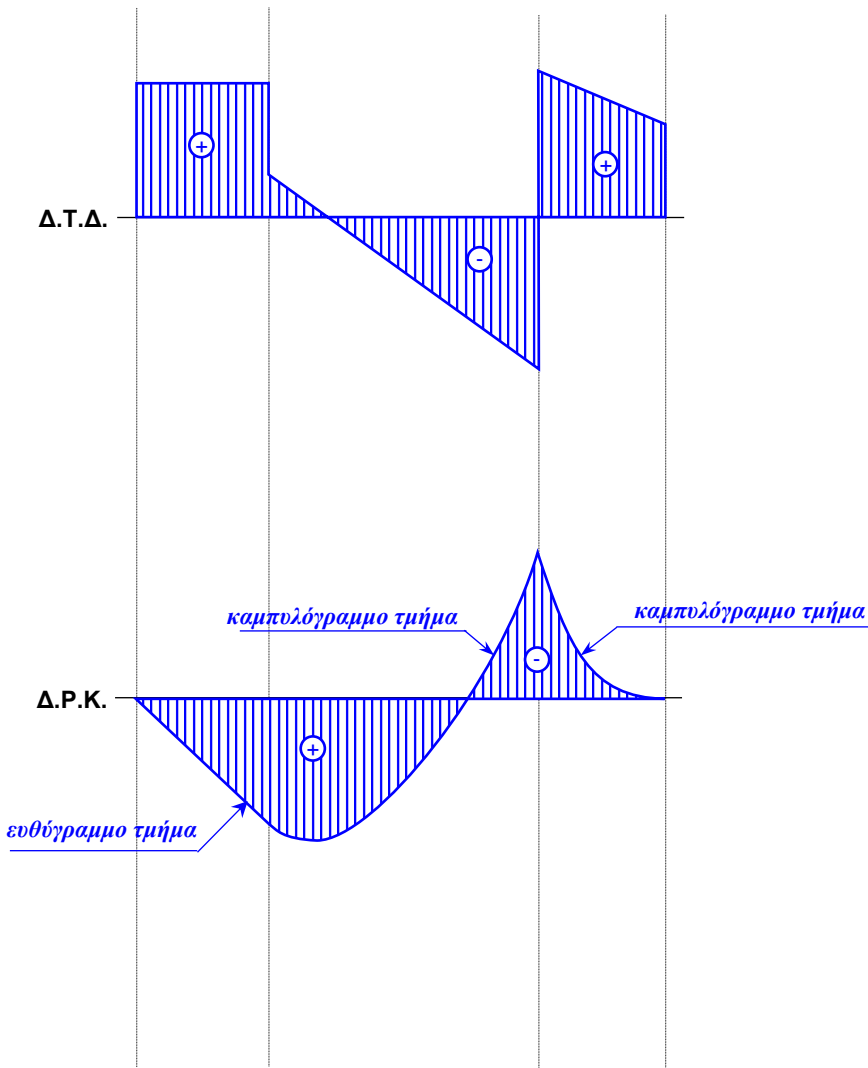
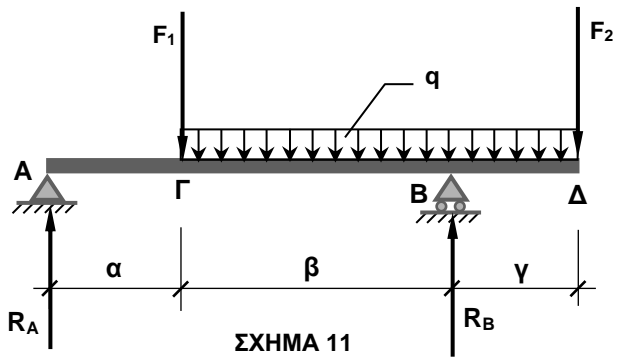
(α) Να γράψετε κάτω από κάθε περίπτωση, το ελεύθερο μήκος λυγισμού ℓ , σε σχέση με το πραγματικό μήκος της ράβδου **L**.

(β) Να κυκλώσετε την κολόνα που είναι η πιο ασφαλής.

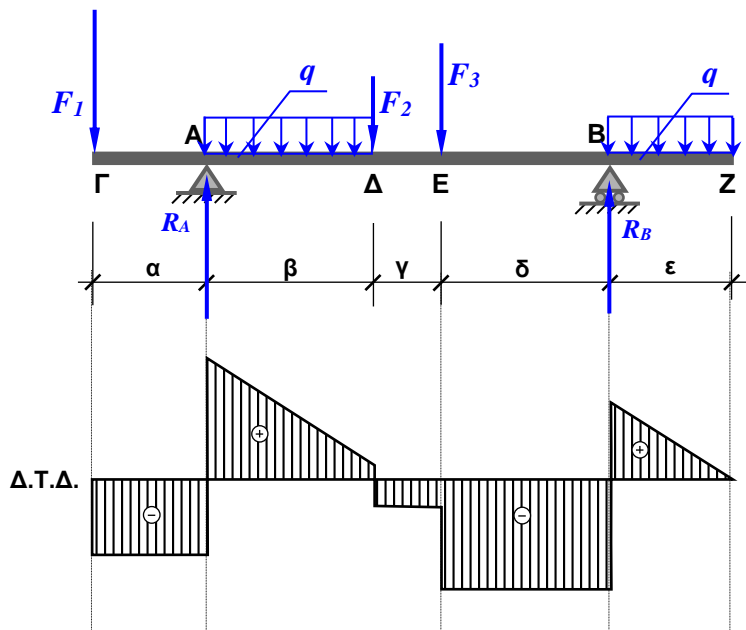


ΣΧΗΜΑ 10

11. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 11**. Να σχεδιάσετε μια πιθανή μορφή των διαγραμμάτων των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**) και των ροπών κάμψης (**Δ.Ρ.Κ.**) της δοκού.



12. Στο **Σχήμα 12** δίνονται αμφιπροέχουσα δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**). Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο **Δ.Τ.Δ.**



ΣΧΗΜΑ 12

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

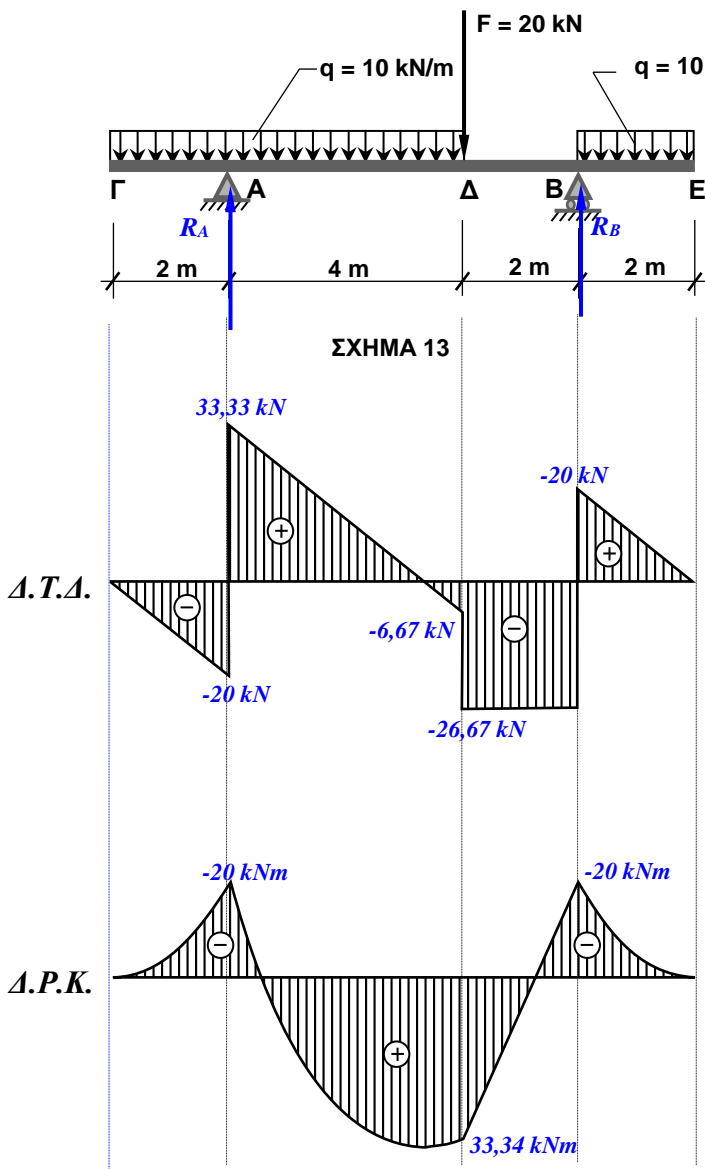
ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από τέσσερις (4) ερωτήσεις

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με οκτώ (8) μονάδες.

13. Στο Σχήμα 13 δίνεται προέχουσα δοκός με τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης.

(α) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.

(β) Να βρείτε τις τιμές στα σημεία **1,2,3,4 και 5** στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων (**ΔΤΔ**) και στα σημεία **6,7 και 8** στο διάγραμμα ροπών κάμψης (**ΔΡΚ**) της δοκού.



Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow$$

$$6 \cdot 10 \cdot 1 + 20 \cdot 4 - R_B \cdot 6 + 10 \cdot 2 \cdot 7 = 0$$

$$\rightarrow \underline{R_B = 46,67 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow$$

$$-6 \cdot 10 \cdot 5 - 20 \cdot 2 + R_A \cdot 6 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$\rightarrow \underline{R_A = 53,33 \text{ kN}}$$

Έλεγχος

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B = 6 \cdot 10 + 20 + 10 \cdot 2 = \underline{100 \text{ kN}}$$

Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_\Gamma = 0$$

$$Q_1 = -10 \cdot 2 = \underline{-20 \text{ kN}}$$

$$Q_2 = -20 + 53,33 = \underline{33,33 \text{ kN}}$$

$$Q_3 = 33,33 - 10 \cdot 4 = \underline{-6,67 \text{ kN}}$$

$$Q_4 = -6,67 - 20 = \underline{-26,67 \text{ kN}}$$

$$Q_5 = -26,67 + 46,67 = \underline{20 \text{ kN}}$$

$$Q_E = 0$$

Ροπές κάμψης

$$M_\Gamma = 0$$

$$M_6 = -10 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{-20 \text{ kNm}}$$

$$M_7 = 53,33 \cdot 4 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = \underline{33,34 \text{ kNm}}$$

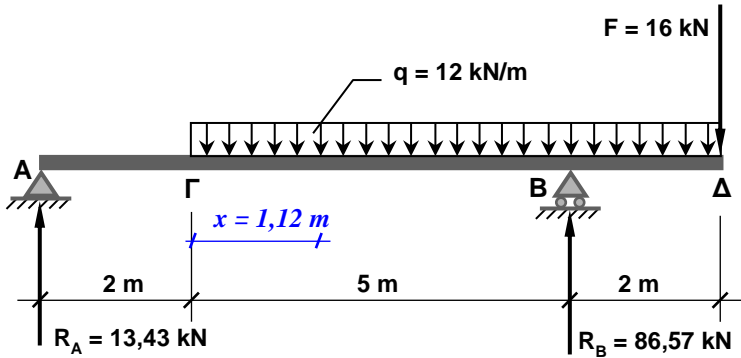
$$M_8 = 53,33 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 5 - 20 \cdot 2 = \underline{-20 \text{ kNm}}$$

$$M_E = 0$$

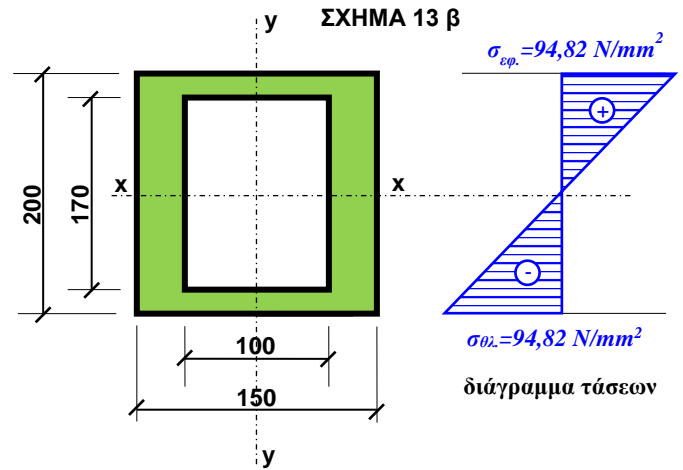
14. Δίνεται προέχουσα δοκός όπως στο **Σχήμα 14α** και η διατομή της στο **Σχήμα 14β**. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε χιλιοστά.

(α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση εφελκυσμού και θλίψης που αναπτύσσεται στη δοκό.

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα κατανομής των τάσεων στη διατομή της δοκού.



ΣΧΗΜΑ 14α



ΣΧΗΜΑ 14β

Θέση μέγιστης θετικής ροπής κάμψης

$$Q(x) = 0 \rightarrow R_A - q \cdot x = 0$$

$$13,43 - 12 \cdot x = 0 \rightarrow x = 1,12 \text{ m}$$

Μέγιστη θετική ροπή κάμψης

$$M_{max} = 13,43 \cdot 3,12 - 12 \cdot 1,12 \cdot 0,56 = 41,90 - 7,53 = 34,37 \text{ KNm}$$

Μέγιστη αρνητική ροπή κάμψης

$$M_B = -2 \cdot 16 - 12 \cdot 2 \cdot 1 = -56 \text{ KNm}$$

Ροπή αδράνειας

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \text{ (ορθογωνικής διατομής)} \rightarrow I_{xx} = \frac{150 \cdot 200^3}{12} - \frac{100 \cdot 170^3}{12} = 59058333,3 \text{ mm}^4$$

Μέγιστη τάση θλίψης και εφελκυσμού

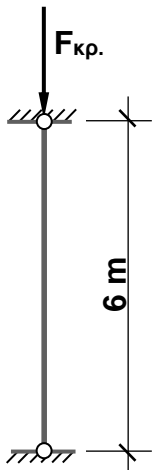
$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y}{I_{xx}} = \frac{56 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 100 \text{ mm}}{59058333,3 \text{ mm}^4} = 94,82 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{max} = \underline{94,82 \text{ N/mm}^2}$$

15. Χαλύβδινη κολόνα ορθογωνικής διατομής **8x12 cm** καταπονείται σε κεντρική θλίψη όπως στο **Σχήμα 15**.

Να υπολογίσετε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού $F_{κρ.}$ καθώς και το επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού $F_{επ.}$ για συντελεστή ασφαλείας $\gamma=3,5$.

Το μέτρο ελαστικότητας είναι $E= 210 \text{ kN/mm}^2$.



Ελεύθερο μήκος λυγισμού

$$\ell = 1 \cdot L = 1 \cdot 6 = 6 \text{ m} = 6 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

Ροπή αδράνειας

$$I_{ελ.} = 120 \cdot 80^3 / 12 = 512 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού

$$F_{κρ.} = \pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.} / \ell^2$$

ΣΧΗΜΑ 15

$$F_{κρ.} = 3,14^2 \cdot 210 \text{ N/mm}^2 \cdot 512 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 / (6 \cdot 10^3 \text{ mm})^2$$

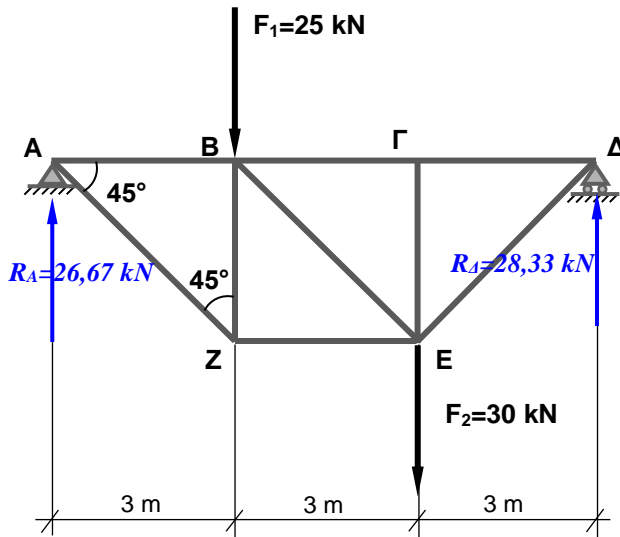
$$F_{κρ.} = \underline{\underline{294,47 \text{ kN}}}$$

$$F_{επ.} = F_{κρ.} / \gamma = 294,47 / 3,5 = 84,13 \text{ kN}$$

$$F_{επ.} = \underline{\underline{84,13 \text{ kN}}}$$

16. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 16**.

- (α) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **Δ**.
- (β) Να υπολογίσετε το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **AB**, **AZ**, **ZB** και **ZE** με τη **μέθοδο της ανάλυσης – ισορροπίας των κόμβων**.



ΣΧΗΜΑ 16

$$R_A + R_{\Delta} = 55 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 25 \cdot 3 + 30 \cdot 6 - 9 \cdot R_{\Delta} = 0$$

$$\rightarrow R_{\Delta} = \underline{28,33 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_{\Delta} = 0 \rightarrow 9 \cdot R_A - 25 \cdot 6 - 30 \cdot 3 = 0$$

$$\rightarrow R_A = \underline{26,67 \text{ kN}}$$

Κόμβος A

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A - F_{AZ} \cdot \eta\mu 45^{\circ} = 0$$

$$F_{AZ} = \frac{26,67}{\eta\mu 45^{\circ}} = 37,72 \text{ kN} \rightarrow \text{Εφελκόμενη}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{AZ} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^{\circ} + F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = -26,67 \text{ kN} \rightarrow \text{Θλιβόμενη}$$

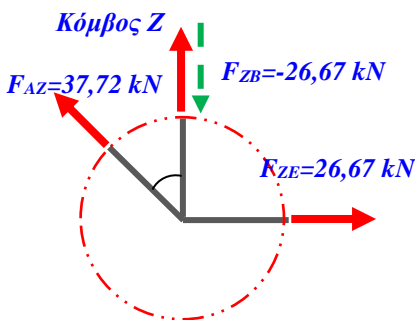
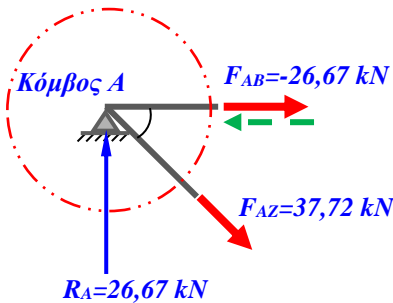
Κόμβος B

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{AZ} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^{\circ} + F_{ZB} = 0$$

$$F_{ZB} = -26,67 \text{ kN} \rightarrow \text{Θλιβόμενη}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{ZE} - F_{AZ} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^{\circ} = 0$$

$$F_{ZE} = 26,67 \text{ kN} \rightarrow \text{Εφελκόμενη}$$



ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΜΕΡΟΣ Γ': Αποτελείται από 1 ερώτηση

Η ερώτηση βαθμολογείται με 20 μονάδες.

17. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 17**.

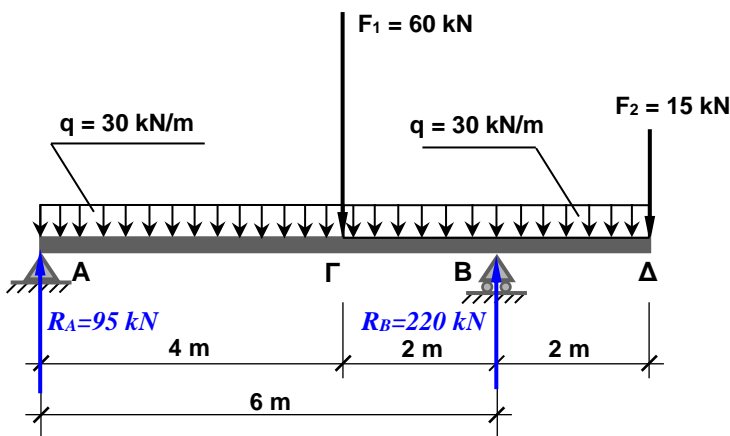
(α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.

(β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**.

(γ) Να υπολογίσετε τη θέση στην οποία αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης M_{max} (σημείο μηδενικής τιμής τέμνουσας δύναμης).

(δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} .

(ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων Q και των ροπών κάμψης M και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ** καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{max} . Στο διάγραμμα ροπών κάμψης να δείξετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματά του.



ΣΧΗΜΑ 17

$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B - 30 \cdot 8 - 60 - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B = 315 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad (30 \cdot 8) \cdot 4 + 60 \cdot 4 - R_B \cdot 6 + 15 \cdot 8 = 0 \rightarrow \\ R_B = 220 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_A \cdot 6 - (30 \cdot 8) \cdot 2 - 60 \cdot 2 + 15 \cdot 2 = 0 \rightarrow \\ R_A = 95 \text{ kN}$$

$$\text{Έλεγχος:} \quad R_A + R_B = 95 + 220 = 315 \text{ kN}$$

ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$Q_A = R_A = 95 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\alpha\rho.} = 95 - 30 \cdot 4 = -25 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi.} = -25 - 60 = -85 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\alpha\rho.} = -85 - 30 \cdot 2 = -145 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\xi.} = -145 + 220 = 75 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\alpha\rho.} = 75 - 30 \cdot 2 = 15 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta} = 15 - 15 = 0$$

ΣΗΜΕΙΟ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

$$Q_x = 0$$

$$95 - 30 \cdot x = 0$$

$$x = 3,17 \text{ m}$$

ΡΟΠΕΣ ΚΑΜΨΗΣ

$$M_{max} = 95 \cdot 3,17 - (30 \cdot 3,17) \cdot 1,58 \rightarrow$$

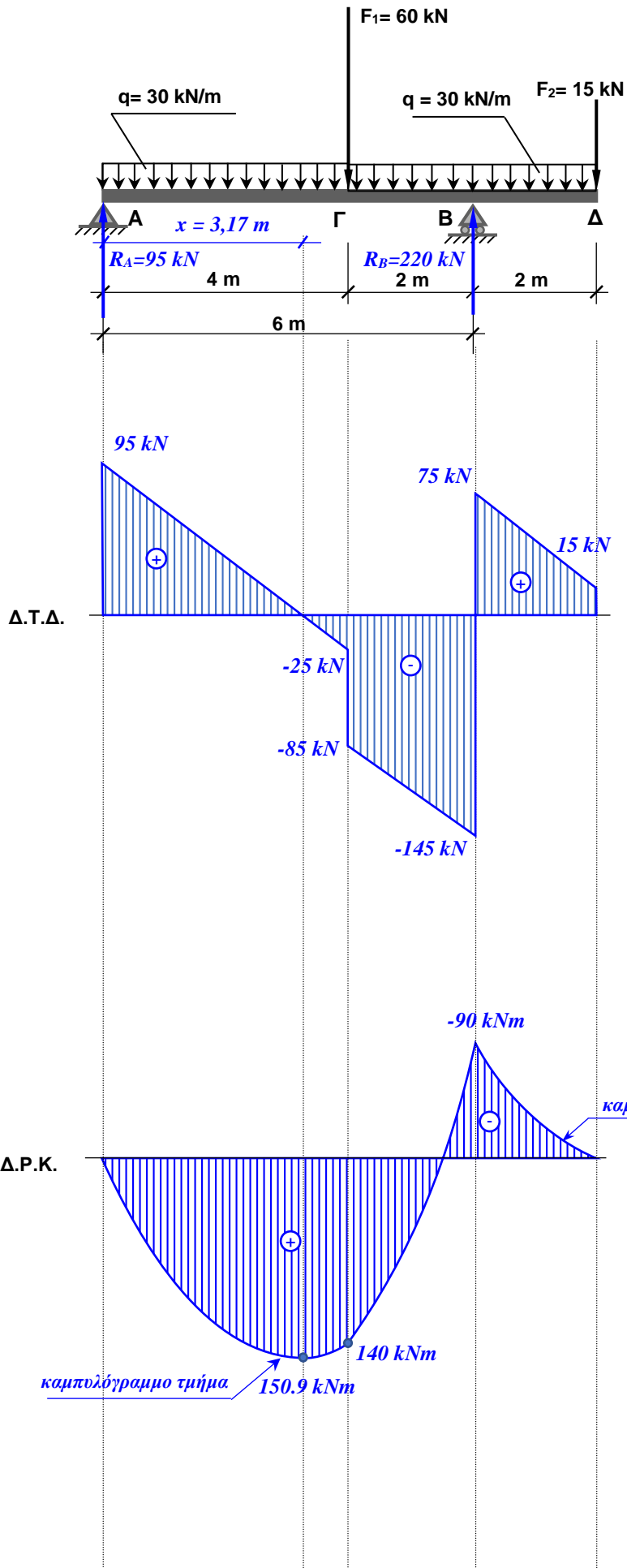
$$M_{max} = 150,9 \text{ kNm}$$

$$M_A = 0$$

$$M_{\Gamma} = 95 \cdot 4 - (30 \cdot 4) \cdot 2 = 140 \text{ kNm}$$

$$M_B = 95 \cdot 6 - (30 \cdot 6) \cdot 3 - 60 \cdot 2 = -90 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta} = 0$$



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Συνθήκες ισορροπίας	$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M = 0$
Ροπές αδράνειας	$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$
Θεώρημα Στάινερ	$I_{x'} = I_x + Ad_y^2 \quad I_{y'} = I_y + Ad_x^2$
Ακτίνα αδράνειας	$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$ $i_x = i_y = 0,25 D \quad i_x = i_y = 0,25 \sqrt{D^2 + d^2}$
Ροπές αντίστασης	$W_x = \frac{I_x}{y} \quad W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \quad W_x = W_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D}$
Απλή κάμψη	$\sigma = \frac{M}{I} y \quad \sigma = \frac{M}{W}$
Λυγισμός	$F_{κρ.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.}}{\ell^2} \quad \lambda = \frac{\ell}{i_{ελ}} \quad F_{επ.} = \frac{F_{κρ.}}{\gamma}$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟ