ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 1 Ιουνίου 2010

7:30 – 10:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $\int \left(2\chi - \eta\mu\chi - e^{x}\right)d\chi = \chi^{2} + \sigma\upsilon\nu\chi - e^{x} + c$

2. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - e^{2\chi}}{\chi^{2}} = \dfrac{2\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 - e^{0}}{0^{2}}$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{ M.E.}\right)$

D.L.H. $= \lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi - 2e^{2\chi}}{2\chi} = \dfrac{2\sigma\upsilon\nu 0 + \eta\mu 0 - 2e^{0}}{0}$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{ M.E.}\right)$

D.L.H. $= \lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{-2\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi - 4e^{2\chi}}{2} = \dfrac{-2\eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 - 4e^{0}}{2} = \dfrac{-5}{2}$

3. $f\left(\chi\right) = \chi^{2} + 4\chi + \alpha$

(1, 2) $\Rightarrow 2 = 1^{2} + 4\cdot 1 + \alpha \quad \Rightarrow \alpha = -3$

$f\left(\chi\right) = \chi^{2} + 4\chi - 3$

$f'\left(\chi\right) = 2\chi + 4$

$f'(\chi) = 0 \Rightarrow \chi = -2$

χ	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(\chi)$		$-$	0	$+$	
$f(\chi)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$(-2,-7)$ min

4. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{5}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A - A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{5}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \dfrac{-15}{2} \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2B = 2\begin{pmatrix} -2 & \dfrac{-15}{4} \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \dfrac{-15}{2} \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A - A^{-1} = 2B$$

5.

$$\left.\begin{matrix} \chi\psi + 2 = 0 \\ \psi = 2\chi + \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \chi(2\chi + \beta) + 2 = 0 \Rightarrow 2\chi^2 + \beta\chi + 2 = 0$$

Εφάπτονται $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \beta^2 - 16 = 0 \Rightarrow \beta = \pm 4$

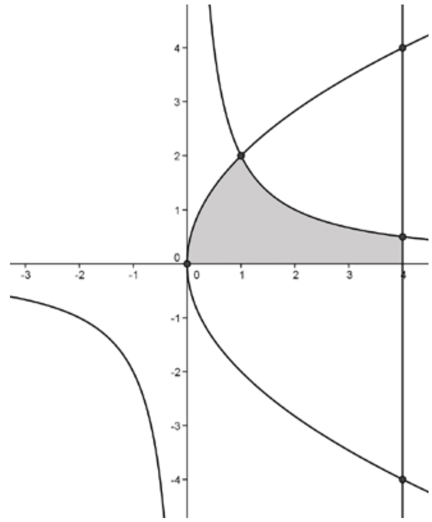
6. Υπάρχουν 5 άνδρες και 6 γυναίκες

α) $\dbinom{11}{3} = \dfrac{11!}{3!8!} = 165$ τρόποι

β) $\dbinom{5}{3} + \dbinom{6}{3} = \dfrac{5!}{2!3!} + \dfrac{6!}{3!3!} = 10 + 20 = 30$ τρόποι

7. $\psi^2 = 4\chi$ και $\chi\psi = 2$

$\Rightarrow \psi^3 = 8 \Rightarrow \psi = 2 \Rightarrow \chi = 1$



$$E = \int_0^1 \psi_{\pi\alpha\rho} d\chi + \int_1^4 \psi_{\upsilon\pi\varepsilon\rho} d\chi =$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{\chi}\, d\chi + \int_1^4 \frac{2}{\chi} d\chi = 2\left[\frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + 2\left[\ln\chi\right]_1^4 =$$

$$= \frac{4}{3} - 0 + 2\ln 4 - 2\ln 1 = \frac{4}{3} + 4\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

8. $(K): \chi^2 + \psi^2 = 4$ και $(\Lambda): \chi^2 + \psi^2 - 8\chi - 4\psi + 12 = 0$

$$\Delta_\Lambda(\Sigma) = 2\Delta_K(\Sigma)$$
$$\chi^2 + \psi^2 - 8\chi - 4\psi + 12 = 2\left(\chi^2 + \psi^2 - 4\right)$$
$$\chi^2 + \psi^2 + 8\chi + 4\psi - 20 = 0$$

9. $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = 1$

$$P(K) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_4) = \frac{2}{3}$$

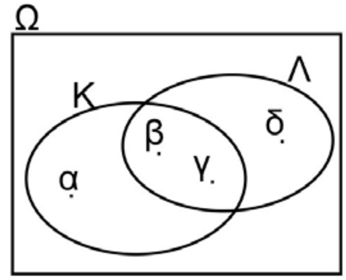
$$P(\Lambda) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{5}$$

$$P(E_2) = P(E_3)$$

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_2) + P(E_4) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} + P(E_2) + P(E_2) + \frac{2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{15}$$

Β΄ Τρόπος



$$P(E_4) = P(K') = 1 - P(K) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(E_1) = P(\Lambda') = 1 - P(\Lambda) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(E_2) = P(E_3)$$

$$P(K) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} + P(E_2) + P(E_2) = \frac{1}{3} \Rightarrow 2P(E_2) = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{15}$$

10. α) Διατύπωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

β) Η $f(\chi) = \chi + \sqrt{\chi}$ είναι συνεχής στο $[1, 4]$ και η $f'(\chi) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$ $\Rightarrow$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (1, 4)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{6 - 2}{4 - 1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \xi = \frac{9}{4} \quad \text{και} \quad \xi \in (1, 4)$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R} - \{4\}$

   Σημεία τομής με άξονες συντεταγμένων:
   Για $\chi = 0 \Rightarrow f(0) = -1$, άρα το $(0,-1)$ είναι το σημείο τομής με τον άξονα των ψ.
   Για $f(\chi) = 0 \Rightarrow \chi^2 - 4\chi + 4 = 0 \Rightarrow \chi = 2''$, άρα το $(2,0)$ είναι το σημείο τομής με τον άξονα των χ.

   Μονοτονία-Ακρότατα:

$$f'(\chi) = \frac{(2\chi-4)(\chi-4)-(\chi^2-4\chi+4)\cdot 1}{(\chi-4)^2} = \frac{\chi^2-8\chi+12}{(\chi-4)^2}$$

$$f'(\chi) = 0 \Rightarrow \chi^2 - 8\chi + 12 = 0 \Rightarrow \chi = 6 \quad \text{ή} \quad \chi = 2$$

$$(\chi-4)^2 > 0$$

χ	$-\infty$		2		$4''$		6		$+\infty$
f'(χ)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(χ)		↗	max	↘	‖	↘	min	↗	

Για $\chi = 2 \Rightarrow f(2) = 0$, $(2,0)$ max.

Για $\chi = 6 \Rightarrow f(6) = 8$, $(6,8)$ min.

Διαστήματα Μονοτονίας:

η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[6, +\infty)$

η f είναι φθίνουσα στα διαστήματα $[2,4)$ και $(4,6]$

Όρια στα άκρα-ασύμπτωτες :

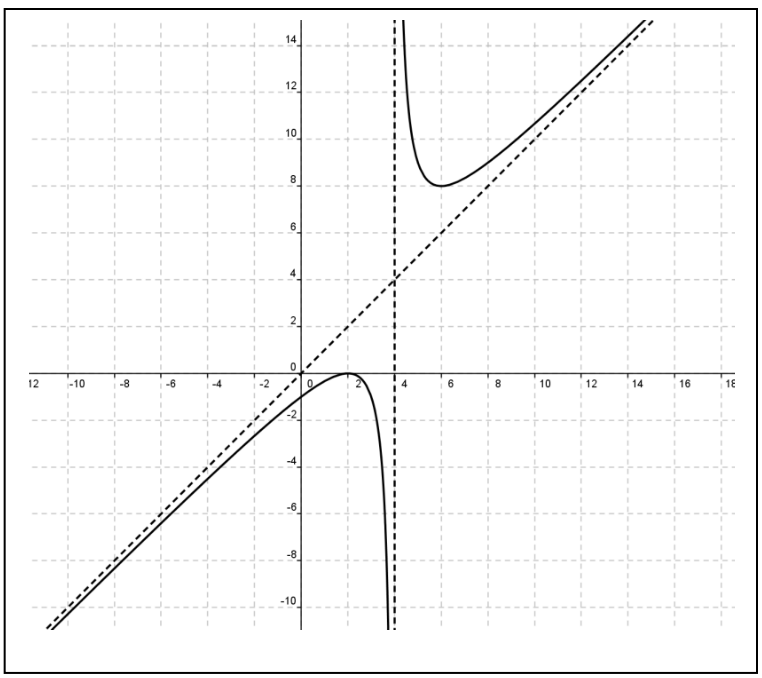
$$\lim_{\chi \to 4^+} \frac{\chi^2 - 4\chi + 4}{\chi - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{\chi \to 4^-} \frac{\chi^2 - 4\chi + 4}{\chi - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \, ,$$

άρα $\chi = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\begin{array}{r|l} \chi^2 - 4\chi + 4 & \chi - 4 \\ \cline{2-2} -\chi^2 + 4\chi & \chi \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

η ευθεία $\psi = \chi$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του διαγράμματος της f.

Γραφική παράσταση:



2.

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+2\eta\mu\chi}d\chi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+2\eta\mu\chi\right)'}{1+2\eta\mu\chi}d\chi=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+2\eta\mu\chi\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+2\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)-\ln\left(1+2\eta\mu 0\right)\right]=\frac{1}{2}\ln 3$$

(για $0<\chi<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1+2\eta\mu\chi>0$)

$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+2\eta\mu\chi}d\chi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu 2\chi}{1+2\eta\mu\chi}d\chi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+2\eta\mu\chi}+\frac{\eta\mu 2\chi}{1+2\eta\mu\chi}\right)d\chi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\chi+2\,\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}{1+2\eta\mu\chi}\right)d\chi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\chi\left(1+2\eta\mu\chi\right)}{1+2\eta\mu\chi}\right)d\chi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\left[\eta\mu\chi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\left.\begin{matrix}A+B=1\\ A=\frac{1}{2}\ln 3\end{matrix}\right\}\Rightarrow B=1-\frac{1}{2}\ln 3$$

3. α) $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1\Rightarrow\frac{2\chi}{\alpha^2}+\frac{2\psi}{\beta^2}\cdot\frac{d\psi}{d\chi}=0\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=-\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2\psi}$

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{\beta^2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha^2\beta\eta\mu\theta}=-\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta}\Rightarrow\lambda_{\kappa}=\frac{\alpha\eta\mu\theta}{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}$

Εξίσωση καθέτου: $\psi-\beta\eta\mu\theta=\frac{\alpha\eta\mu\theta}{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}\left(\chi-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\right)$

$\beta\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\psi-\beta^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=\alpha\eta\mu\theta\cdot\chi-\alpha^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

$\alpha\eta\mu\theta\cdot\chi-\beta\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\psi=\alpha^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta-\beta^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

$\alpha\eta\mu\theta\cdot\chi-\beta\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\psi=\left(\alpha^2-\beta^2\right)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

β) $\chi=0\Rightarrow\psi=-\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow\psi=\frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)\eta\mu\theta}{\beta}$,

$B\left(0,\frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)\eta\mu\theta}{\beta}\right)$

$$\chi_M = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{2}$$

$$\psi_M = \frac{\frac{\left(\beta^2-\alpha^2\right)\eta\mu\theta}{\beta}+\beta\eta\mu\theta}{2} = \frac{\eta\mu\theta\left(2\beta^2-\alpha^2\right)}{2\beta}$$

- Για $\alpha \neq \beta\sqrt{2} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{2\beta\psi}{2\beta^2-\alpha^2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2\chi}{\alpha}$

  $$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

  $$\left(\frac{2\beta\psi}{2\beta^2-\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{2\chi}{\alpha}\right)^2 = 1$$

  είναι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ.

- Για $\alpha = \beta\sqrt{2} \Rightarrow \psi_M = 0 \Rightarrow \psi = 0$

  είναι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ.

4.

$$P(A) = \frac{\binom{39}{9}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{39!}{9!30!}}{\frac{40!}{30!10!}} = \frac{\frac{39!}{9!}}{\frac{40!}{10!}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{20!}{10!10!}}{\frac{40!}{30!10!}} = \frac{184756}{847660528} = \frac{1}{4588}$$

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{20}{6}\cdot\binom{20}{4}}{\binom{40}{10}} = \frac{\frac{20!}{6!14!}\cdot\frac{20!}{16!4!}}{\frac{40!}{30!10!}} = \frac{187792200}{847660528} \approx 0.22$$

5. α) $f'(\chi)=\dfrac{2\chi e^{2\chi}-\left(1+\chi^2\right)2e^{2\chi}}{e^{4\chi}}=\dfrac{2e^{2\chi}\left(\chi-1-\chi^2\right)}{e^{4\chi}}=\dfrac{-2\chi^2+2\chi-2}{e^{2\chi}}$

Επειδή $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-16=-12<0$ και $\alpha=-2<0$
έχουμε ότι $-2\chi^2+2\chi-2<0$, $\forall\chi\in\mathbb{R}$. Επίσης $e^{2\chi}>0$.

Άρα $f'(\chi)<0,\ \forall\chi\in\mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f''(\chi)=\frac{(-4\chi+2)e^{2\chi}-\left(-2\chi^2+2\chi-2\right)2e^{2\chi}}{e^{4\chi}}=\frac{4\chi^2-8\chi+6}{e^{2\chi}}$$

Επειδή $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=64-96=-32<0$ και $\alpha=4>0$
έχουμε ότι $4\chi^2-8\chi+6>0$, $\forall\chi\in\mathbb{R}$. Επίσης $e^{2\chi}>0$.

Άρα $f''(\chi)>0,\ \forall\chi\in\mathbb{R}$ δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\forall\alpha<\beta\Rightarrow f(\alpha)>f(\beta)\Rightarrow\frac{1+\alpha^2}{e^{2\alpha}}>\frac{1+\beta^2}{e^{2\beta}}\Rightarrow\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}>\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\beta}}\Rightarrow\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}>e^{2(\alpha-\beta)}$$

γ) $\displaystyle\int_0^2\frac{1+\chi^2}{e^{2\chi}}d\chi=\int_0^2\left(1+\chi^2\right)e^{-2\chi}\,d\chi=\int_0^2\left(1+\chi^2\right)d\left(\frac{e^{-2\chi}}{-2}\right)=$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(1+\chi^2\right)e^{-2\chi}\right]_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2\chi}\,d\left(1+\chi^2\right)=$$

$$=-\frac{5}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}+\int_0^2\chi e^{-2\chi}\,d\chi=-\frac{5}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}+\int_0^2\chi\,d\left(\frac{e^{-2\chi}}{-2}\right)=$$

$$=-\frac{5}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\chi e^{-2\chi}\right]_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2\chi}\,d\chi=$$

$$=-\frac{5}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}-e^{-4}+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2\chi}\,d\chi=$$

$$=-\frac{5}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}-e^{-4}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2\chi}}{-2}\right]_0^2=$$

$$=-\frac{5}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}-e^{-4}-\frac{1}{4}e^{-4}+\frac{1}{4}=\frac{3-15e^{-4}}{4}$$