

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κοινού Κορμού

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη 2 Ιουνίου 2009
07:30 π.μ. – 10:30 π.μ.

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	Κεφάλαιο € 2000 τοκίζεται με απλό τόκο προς 4% για 3 χρόνια. Να υπολογίσετε τον τόκο που θα αποδώσει. $T = \frac{2000 \cdot 4 \cdot 3}{100} = € 240$	
2.	Ένα σαλόνι αξίας €2500 πωλήθηκε με έκπτωση 20%. Να υπολογίσετε πόσο πωλήθηκε το σαλόνι. Πώληση: $\frac{80}{100} \cdot 2500 = € 2000$	
3.	Κύβος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 96 cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο του. $E_{ολ} = 96 \text{ cm}^2$ $\Rightarrow 6a^2 = 96 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$ $V = a^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$	
4.	Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ που αρχίζουν με το γράμμα Τ . $\boxed{T} \boxed{A A A A} \boxed{\Sigma \Sigma} \boxed{N I}$ $M_8^\epsilon = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{40320}{48} = 840$	

5.

Ρίχνουμε ένα ζάρι δυο φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «το γινόμενο των ενδείξεων είναι 4».

B: «το άθροισμα των ενδείξεων είναι 5».

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B.

$$A = \{(1,4), (2,2), (4,1)\}$$

$$\Rightarrow N(A) = 3$$

$$B = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$\Rightarrow N(B) = 4$$

$$N(\Omega) = 36$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

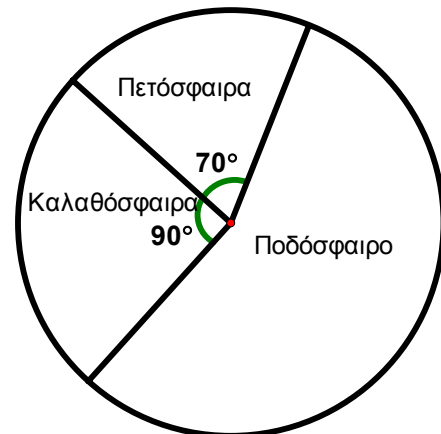
$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

6.

Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα δείχνει τις προτιμήσεις των 540 μαθητών ενός Λυκείου ως προς τα αθλήματα Πετόσφαιρα, Καλαθόσφαιρα και Ποδόσφαιρο.

Να υπολογίσετε:

- α) το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν την Καλαθόσφαιρα,
β) τον αριθμό των μαθητών που προτιμούν το Ποδόσφαιρο.



α) Καλαθόσφαιρα: $\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 100\% = 25\%$

β) Ποδόσφαιρο: $360^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 200^\circ$

$$\frac{200^\circ}{360^\circ} \cdot 540 = 300$$

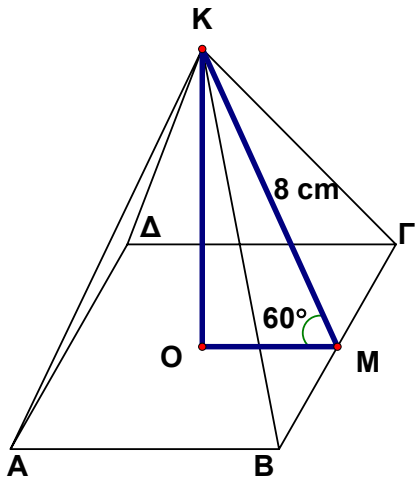
7.	<p>Δίδονται τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9. Να βρείτε πόσους άρτιους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία αυτά, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.</p> <table border="1" data-bbox="240 389 624 479"> <tr> <td>Φάσεις</td> <td>Ε</td> <td>Δ</td> <td>Μ</td> </tr> <tr> <td>Τρόποι</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>3</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$\Rightarrow 5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$</p>	Φάσεις	Ε	Δ	Μ	Τρόποι	5	6	3	
Φάσεις	Ε	Δ	Μ							
Τρόποι	5	6	3							
8.	<p>Η μέση τιμή του ύψους των 10 καλαθοσφαιριστών μιας σχολικής ομάδας είναι 1,79m. Στην ομάδα εντάσσονται 2 νέοι παίκτες, με ύψη 1,83m και 1,87m. Να βρείτε τη μέση τιμή του ύψους των καλαθοσφαιριστών της ομάδας με τη νέα της σύνθεση.</p> <p>$\sum \chi_i = 10 \cdot 1,79 = 17,90$</p> <p>$\bar{X} = \frac{17,90 + 1,83 + 1,87}{12} = 1,80 \text{ m}$</p>									
9.	<p>Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 448 cm^2 και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 288 cm^2. Το μήκος της βάσης του είναι πενταπλάσιο του πλάτους. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου.</p> <p>$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} \Rightarrow 448 = 288 + 2E_{\beta}$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Rightarrow E_{\beta} = 80$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Rightarrow \alpha\beta = 80$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\alpha = 5\beta \Rightarrow 5\beta \cdot \beta = 80$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Rightarrow \beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = 4 \text{ cm}$ και $\alpha = 20 \text{ cm}$</p> <p>$E_{\pi} = 288 \Rightarrow 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = 288$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Rightarrow 40\gamma + 8\gamma = 288$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Rightarrow \gamma = \frac{288}{48}$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Rightarrow \gamma = 6 \text{ cm}$</p> <p>$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 20 \cdot 4 \cdot 6 = 480 \text{ cm}^3$</p>									

<p>10.</p>	<p>Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει: $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{7}$.</p> <p>Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(A')$ και $P(A \cap B)$.</p> $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4P(A) = 3P(A')$ $\Rightarrow 4P(A) = 3(1 - P(A))$ $\Rightarrow 7P(A) = 3$ $\Rightarrow P(A) = \frac{3}{7}$ $P(A') = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $= \frac{3}{7} + \frac{1}{2} - \frac{5}{7}$ $= \frac{3}{14}$	
------------	--	--

	<p><u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u></p>	
<p>1.</p>	<p>Ο κύριος Φοίβος αγόρασε ένα σπίτι προς €290 000. Ξόδεψε €50 000 για να το ανακαινίσει. Στη συνέχεια αποφάσισε να το πωλήσει.</p> <p>α) Πόσα πρέπει να το πωλήσει για να κερδίσει 30% πάνω στο συνολικό κόστος;</p> <p>β) Αν κάποιος αγοραστής προσφέρει €425 000, να υπολογίσετε το ποσοστό (%) του κέρδους που θα έχει ο κύριος Φοίβος πάνω στο συνολικό κόστος.</p> <p>α) $290\,000 + 50\,000 = €340\,000$</p> <p>Πώληση: $\frac{130}{100} \cdot 340\,000 = €442\,000$</p> <p>β) Κέρδος: $425\,000 - 340\,000 = €85\,000$</p> <p>Ποσοστό Κέρδους: $\frac{85\,000}{340\,000} \cdot 100\% = 25\%$</p>	

2.

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος 8 cm που σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.



$$\begin{aligned} \widehat{KMO} = 60^\circ &\Rightarrow \widehat{MKO} = 30^\circ \\ KM = 8 \text{ cm} &\Rightarrow OM = 4 \text{ cm} \Rightarrow AB = 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Π.Θ.

$$(KO)^2 + (OM)^2 = (KM)^2 \Rightarrow$$

$$(KO)^2 + (4)^2 = (8)^2 \Rightarrow$$

$$(KO)^2 = 48 \Rightarrow$$

$$(KO) = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\alpha = 8 \text{ cm}, \quad u = 4\sqrt{3} \text{ cm}, \quad h = 8 \text{ cm}$$

$$\Pi_\beta = 4\alpha = 32 \text{ cm}, \quad E_\beta = \alpha^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} = \frac{32 \cdot 8}{2} = 128 \text{ cm}^2$$

$$E_{ολ} = E_\pi + E_\beta = 128 + 64 = 192 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{E_\beta \cdot u}{3} = \frac{64 \cdot 4\sqrt{3}}{3} = \frac{256\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

3.

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις υπερωρίες (σε ώρες) των 25 εργαζομένων ενός εργοστασίου κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας.

Υπερωρίες (x_i)	0	1	2	3	4	5
Εργαζόμενοι (f_i)	3	8	6	4	2	2

α) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή των υπερωριών.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των υπερωριών.

γ) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους εργαζόμενους, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «ο εργαζόμενος να έχει 3 ώρες υπερωρίες»

B: «ο εργαζόμενος να έχει το πολύ 2 ώρες υπερωρίες».

α) $x_{\varepsilon} = 1$ ώρα

β)

x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
0	3	0	4	12
1	8	8	1	8
2	6	12	0	0
3	4	12	1	4
4	2	8	4	8
5	2	10	9	18
	25	50		50

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{50}{25} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2} = 1,41$$

$$\gamma) P(A) = \frac{4}{25}$$

$$P(B) = \frac{3+8+6}{25} = \frac{17}{25}$$

4.

Από τούς 4 άνδρες και 7 γυναίκες που εργάζονται σε ένα γραφείο θα επιλεγεί μια πενταμελής επιτροπή.

α) Να υπολογίσετε:

i) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλεγεί αυτή η επιτροπή.

ii) πόσες από τις πιο πάνω επιτροπές έχουν τουλάχιστον 3 άνδρες.

β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

A: «στην πενταμελή επιτροπή συμμετέχουν ακριβώς 3 άνδρες».

$$\alpha) \text{ (i) } \binom{11}{5} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462$$

$$\text{(ii) } \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{1} = 4 \cdot 21 + 1 \cdot 7 = 91$$

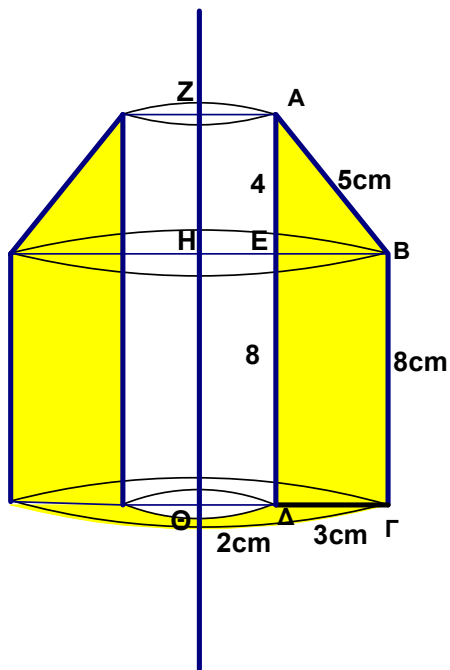
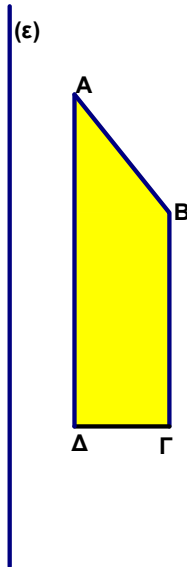
$$\beta) \quad N(A) = \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} = 84$$

$$N(\Omega) = \binom{11}{5} = 462$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{84}{462} = \frac{2}{11}$$

5. Ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$), με πλευρές $A\Delta = 12\text{ cm}$, $B\Gamma = 8\text{ cm}$ και $\Delta\Gamma = 3\text{ cm}$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) που είναι παράλληλη προς την $A\Delta$ και απέχει 2 cm από αυτή. Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας, και
 β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή.



Π.Θ. στο $A\overset{\Delta}{B}E \Rightarrow \lambda = 5\text{ cm}$
 $R = 5\text{ cm}$, $\rho = 2\text{ cm}$,
 $U_{\text{κυλ.}B\Gamma E\Theta} = 8\text{ cm}$,
 $U_{\text{κυλ.}A\Delta\Theta Z} = 12\text{ cm}$

$$E_{ολ} = E_{AB} + E_{B\Gamma} + E_{\Gamma\Delta} + E_{A\Delta}$$

$$E_{ολ} = \pi(2+5) \cdot 5 + 2\pi \cdot 5 \cdot 8 + \pi(5^2 - 2^2) + 2\pi \cdot 2 \cdot 12$$

$$E_{ολ} = 35\pi + 80\pi + 21\pi + 48\pi$$

$$\boxed{E_{ολ} = 184\pi\text{ cm}^2}$$

$$V = V_{\text{κολ.κων.}ABHZ} + V_{\text{κυλ.}B\Gamma\Theta H} - V_{\text{κυλ.}A\Delta\Theta Z}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4}{3}(5^2 + 2 \cdot 5 + 2^2) + \pi \cdot 5^2 \cdot 8 - \pi \cdot 2^2 \cdot 12$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4}{3}(25 + 10 + 4) + \pi \cdot 25 \cdot 8 - \pi \cdot 4 \cdot 12$$

$$V = 52\pi + 200\pi - 48\pi$$

$$\boxed{V = 204\pi\text{ cm}^3}$$