ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Σάββατο, 31 Μαΐου 2008
07:30 π.μ. – 10:30 π.μ.

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	$\int_1^2 (2x+1)dx = \left[\frac{2x^2}{2}+x\right]_1^2$ $=[2^2+2]-[1^2+1]$ $= 6-2$ $= 4$	
2.	Ε (3,0) α=3 Διευθετούσα: x+3=0	
3.	$L=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x+\eta\mu x}=\frac{0-0}{0+\eta\mu 0}=\frac{0}{0}$ Απροσδιοριστία. Εφαρμόζουμε DLH $L=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x+\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ $=\frac{2\cdot 0-1}{1+\sigma\upsilon\nu 0}$ $=-\frac{1}{2}$	
4.		

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0-4 & 10+0-3 \\ -6+1+8 & -15+0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{-21} \begin{bmatrix} -9 & -7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$y = \alpha x^3 + 6x^2 - \beta x + 5$

$y' = 3\alpha x^2 + 12x - \beta$

$y'' = 6\alpha x + 12$

$y''(1) = 0 \Rightarrow 6\alpha + 12 = 0$
$\alpha = -2$

$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = \alpha + 6 - \beta + 5$
$\alpha - \beta = -9$
$-2 - \beta = -9$
$\beta = 7$

6.

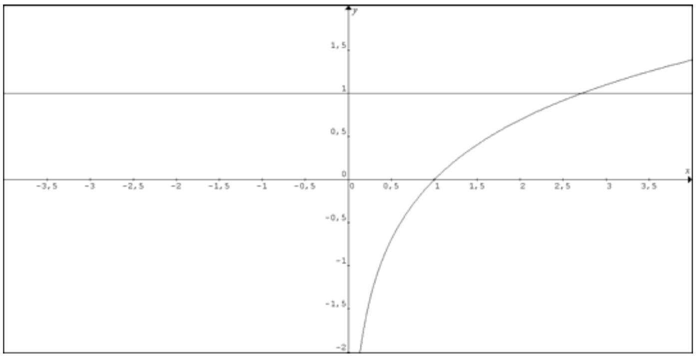
$2!.4!.5!.3! =$

$= 2 \cdot 24 \cdot 120 \ 6$

$= 34560$

7.

y=lnx $\qquad$ $x=e^{y}$



$$V=\pi\int_0^1 x^2dy$$

$$=\pi\int_0^1 e^{2y}dy$$

$$=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1$$

$$=\pi\left[\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi(e^2-1)}{2}\quad \text{κ.μ.}$$

8.

$$\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$$

$$2\beta^2x+2\alpha^2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2\alpha^2y\frac{dy}{dx}=-2\beta^2x$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\beta^2x}{\alpha^2y}$$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}\Big|_{T}=\frac{-\beta^2x_1}{\alpha^2y_1}$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Τ

	$y-y_1=\frac{-\beta^2}{\alpha^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ $yy_1\alpha^2-\alpha^2y_1^2=-\beta^2xx_1+\beta^2x_1^2$ $yy_1\alpha^2+\beta^2xx_1=\alpha^2y_1^2+\beta^2x_1^2$ $\frac{yy_1\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{\beta^2xx_1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$ $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$	
9.	(α) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται ανεξάρτητα αν $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. { Η πραγματοποίηση του Α δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του Β, δηλαδή P(B)=P(B/A), δηλαδή $P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=P(A)P(B)$ } (β) Α,Β ανεξάρτητα $\Rightarrow$ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$ $=P(A)-P(A)P(B)$ $=P(A)[1-P(B)]$ $=P(A)P(B')$	
10.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f''(x)]\sigma\upsilon\nu x\,dx=2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f''(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\,d(f'(x))=2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx+[\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)\cdot\eta\mu x\,dx=2$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx+[\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x\,d(f(x))=2$	

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx + \left[\sigma\upsilon\nu x f'(x)\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} + \left[\eta\mu x \cdot f(x)\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} - \int_0^{\frac{\Pi}{2}} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\cdot f'(\frac{\pi}{2}) - \sigma\upsilon\nu 0 f'(0) + \eta\mu\frac{\pi}{2} f(\frac{\pi}{2}) - \eta\mu 0 f(0) = 2$$

$$-f'(0) + 3 = 2$$

$$f'(0) = 1$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1.

$$y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

Π.Ο $x \in R - \{1\}$

$x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ σημείο τομής με τον άξονα των y : (0, -4)

$y \neq 0$ Δεν τέμνει τον άξονα των x

$$y' = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 4)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3 \quad x = -1$

x	- ∞		-1		1		3		+∞
y'		+	0	-	‼	-	0	+	
y		↗		↘	‼	↘		↗	

$x = 3 \qquad y = \dfrac{3^2 - 3 + 4}{3 - 1} = \dfrac{10}{2} = 5$ min (3,5)

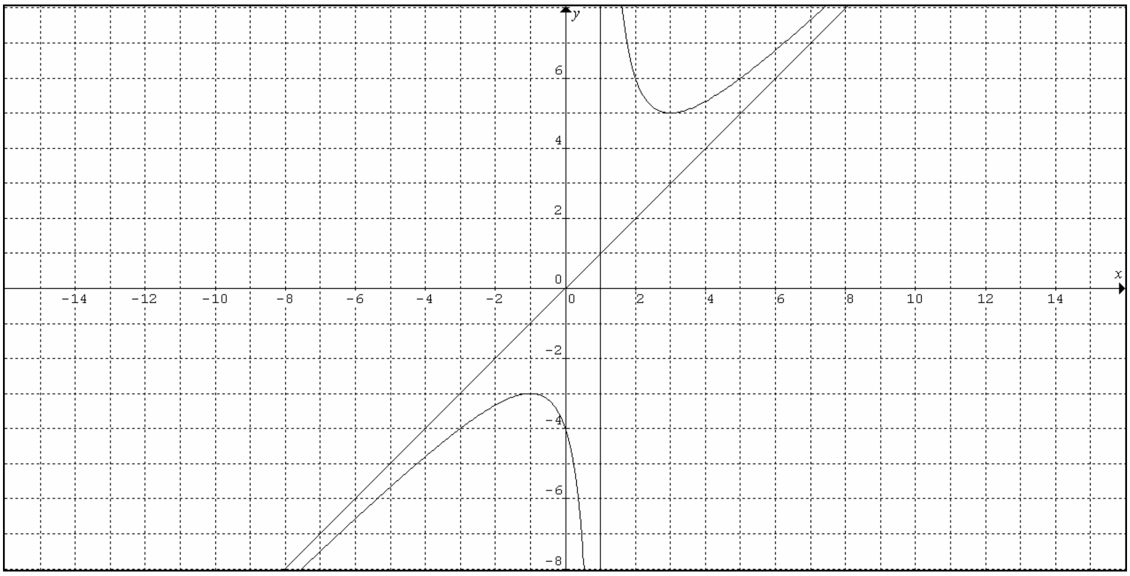
$x = -1 \qquad y = -3$ max (-1, -3)

<u>Ασύμπτωτες</u>

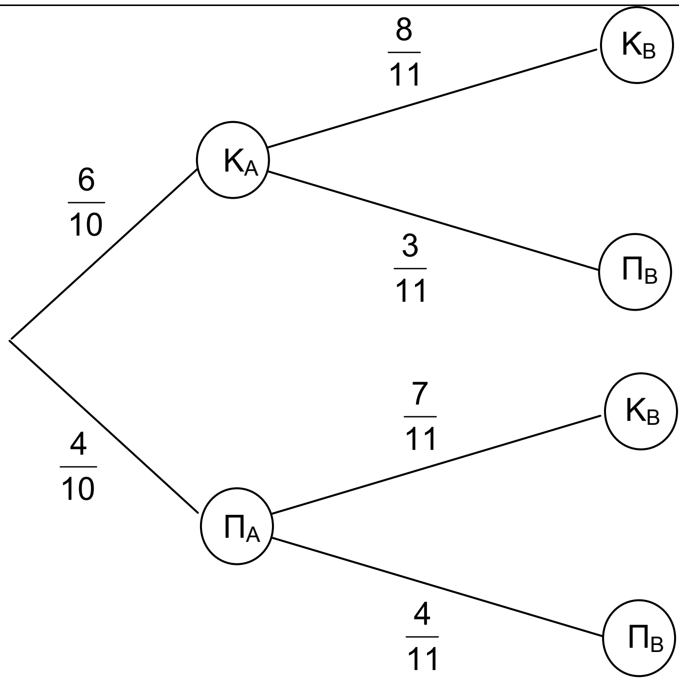
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ &\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{aligned}\right\} \quad x = 1 \ \text{κατ. ασυμ.}$$

x^2-x+4	x-1
-x^2+x	x
4	

y=x πλάγια ασύπτωτη



2.



Συμβολίζουμε με:

K_A, η σφαίρα από το δοχείο Α είναι κόκκινη
K_B, η σφαίρα από το δοχείο Β είναι κόκκινη
Π_A, η σφαίρα από το δοχείο Α είναι πράσινη
Π_B, η σφαίρα από το δοχείο Β είναι πράσινη

(α) $P(K_A \cap K_B) = P(K_A)P(K_B / K_A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{11} = \frac{24}{55}$

(β) P(ίδια σύνθεση)=

$$= P(K_A \cap K_B) + P(\Pi_A \cap \Pi_B) = P(K_A)P(K_B / K_A) + P(\Pi_A)P(\Pi_B / \Pi_A)$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{11} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{11}$$

$$= \frac{32}{55}$$

3.

α) $(x-α)^2+y^2=R^2$ T(α+ Rσυνθ, Rημθ)

$$2(x-α)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(x-α)}{y}$$

$$λεφ=\frac{-Rσυνθ}{Rημθ}=-\frac{\text{óõí è}}{\text{çì è}}$$

<u>εξίσωση εφαπτομένης</u>

$$y-y_1=λεφ\,(x-x_1)$$

$$y-Rημθ=-\frac{συνθ}{ημθ}\,(x-α-Rσυνθ)$$

$$yημθ-Rημ^2θ=-xσυνθ+ασυνθ+R\,συν^2θ$$

$$xσυνθ+yημθ=ασυνθ+R\,(ημ^2θ+συν^2θ)$$

$$xσυνθ+yημθ=ασυνθ+R$$

β) $\left.\begin{array}{l} xσυνθ+yημθ=ασυνθ+R \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{ασυνθ+R}{συνθ}$

$$A=\left(\frac{ασυνθ+R}{συνθ},\,0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} xσυνθ+yημθ=ασυνθ+R \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{ασυνθ+R}{ημθ}$$

$$B=\left(0,\frac{ασυνθ+R}{ημθ}\right)$$

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{ασυνθ+R}{2συνθ}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{ασυνθ+R}{2ημθ}$$

$$M\left(\frac{ασυνθ+R}{2συνθ},\frac{ασυνθ+R}{2ημθ}\right)$$

$$x=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+R}{2\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow x.2\sigma\upsilon\nu\theta=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+R$$

$$2x\sigma\upsilon\nu\theta-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta=R$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta(2x\text{-}\alpha)=R$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{R}{2x-\acute{a}}$$

$$y=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+R}{2\eta\mu\theta} \Rightarrow 2y\eta\mu\theta=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+R$$

$$2y\eta\mu\theta=\frac{\alpha R}{2\chi-\alpha}+R$$

$$2y\eta\mu\theta=\frac{\alpha R+2Rx-\alpha R}{2x-\alpha}$$

$$\eta\mu\theta=\frac{Rx}{y(2x-\acute{a})}$$

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$$

$$\frac{R^2x^2}{y^2(2x-\acute{a})^2}+\frac{R^2}{(2x-\acute{a})^2}=1$$

$$R^2x^2+R^2y^2=y^2(2x\text{-}\alpha)^2$$

$$R^2(x^2+y^2)=y^2(2x\text{-}\alpha)^2$$

4.

4. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)g(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)g(x)dx$

Θέτω $u = -x$

$du = -dx \Rightarrow dx = -du$

$x = -\alpha \quad \Rightarrow \quad u = \alpha$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$

$\int_{-\alpha}^{0} f(x)g(x)dx = \int_{\alpha}^{0} f(-u)g(-u)(-du)$

$= \int_{0}^{\alpha} f(u)\left[1-g(u)\right]du$ διότι $f(-u)=f(u)$ και $g(-u)=1-g(u)$

$= \int_{0}^{\alpha} f(u)du - \int_{0}^{\alpha} f(u)g(u)du$

$= \int_{0}^{\alpha} f(x)dx - \int_{0}^{\alpha} f(x)g(x)dx$

$\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx - \int_{0}^{\alpha} f(x)g(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)g(x)dx$

$= \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

β) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}\,dx$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$

$g(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}$

$g(-x) = \frac{1}{e^{-2x}+1} = \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}}+1} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$g(x)+g(-x) = \frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = 1$

Από το (α) $\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\,dx$

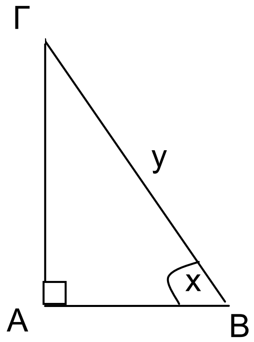
$= \left[\eta\mu x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu 0$

$= 1$

5.

ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ=c



$$y\sigma\upsilon\nu x + y\eta\mu x + y = c, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{c}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + 1}$$

$$y' = \frac{-c(-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + 1)^2}$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad -c(-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0$$

$$-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\varepsilon\varphi x = 1 \qquad \sigma\upsilon\nu x \neq 0, \text{ διότι } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y’	-	0	+
y	↘	min	↗

διότι ημx<συνx για $0 < x < \frac{\pi}{4}$ και ημx>συνx για $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

ή

$$y'' = c\frac{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1)^2 - 2(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1)^4}$$

$$y'' = c\frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1)[(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1) + 2(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2]}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1)^4}$$

$\Rightarrow \quad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ διότι c>0 και $\eta\mu\frac{\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

$\Rightarrow$ στο $x = \frac{\pi}{4}$ υπάρχει ελάχιστο

$\Rightarrow$ οι ζητούμενες γωνίες είναι $x = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{\pi}{4}$