

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008**

**Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ**

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Σάββατο, 14 Ιουνίου 2008  
7:30 – 10:30**

**ΛΥΣΕΙΣ**

**Μέρος Α΄**

<b>1.</b>	$\int_0^2 4x^3 dx = [x^4]_0^2$ $= 2^4 - 0^4$ $= 16$	
<b>2.</b>	$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ <p>K(2,-3)</p> <p>R= 5</p>	
<b>3.</b>	<p><u>Α τρόπος</u></p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x^2 + 2x} = \frac{0}{0} \text{ (απροσδιόριστη μορφή) Εφαρμόζω De L'Hospital}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{2x + 2} = \frac{6}{0 + 2} = 3$ <p><u>Β τρόπος</u></p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x^2 + 2x} = \frac{0}{0} \text{ (απροσδιόριστη μορφή)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x+2} = \frac{6}{0+2} = 3$	
<b>4.</b>	$x = \frac{14 + 17 + x + 20 + 12}{5}$ $16 = \frac{63 + x}{5}$ $63 + x = 80$ $x = 17$	

5.	$y = x^2 + \alpha x - 8$ $y' = 2x + \alpha$ $y' = 0 \quad x = 2 \quad 0 = 4 + \alpha \quad \alpha = -4$	
6.	<p>ΙΣΟΤΗΤΑ I, Σ, Ο, Τ, Τ, Η, Α</p> $M_7^{\epsilon} = \frac{7!}{2!} = 2520$ <p>_ T , T _ _ _ _</p> $M_6 = 6! = 720$	
7.	$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{4}{3}$ $\frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{4}{3}$ $3P(A) = 4 - 4P(A)$ $7P(A) = 4$ $P(A) = \frac{4}{7}$	
8.	$x^2 + y^2 + 2y = 4$ $2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$ $(y + 1) \frac{dy}{dx} = -x$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y + 1}$ $\lambda \epsilon \phi = -\frac{2}{0 + 1} = -2$	

<p>9.</p>	$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{20}$	
<p>10.</p>	$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\eta\mu^2\theta \sqrt{1-\eta\mu^2\theta}} \sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ $= \int \frac{1}{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} \sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ $= \int \frac{1}{\eta\mu^2\theta} d\theta$ $= \int \sigma\tau\epsilon\mu^2\theta d\theta$ $= -\sigma\phi\theta + c$ $= -\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} + c$ $= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$	$x = \eta\mu\theta$ $dx = \sigma\upsilon\nu\theta d\theta$

## Μέρος Β'

1.

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$\text{Π.Ο. } x \in \mathbb{R}$$

Σημεία τομής με τους άξονες

Άξονας xx':  $y = 0 \quad x^3 - 3x^2 = 0$

$$x^2(x-3) = 0$$

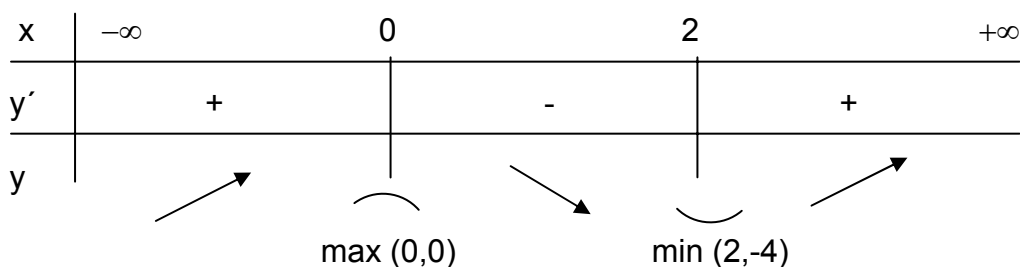
$$x = 0, \quad x = 3 \quad \begin{matrix} (0,0) \\ (3,0) \end{matrix}$$

Άξονας yy':  $y = 0, \quad x = 0 \quad (0,0)$

Μονοτονία - ακρότητα:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \\ \\ \end{array}$$

$$f'(x) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 3x(x-2) = 0 \\ x = 0, \quad x = 2 \end{array}$$



$$x = 0 \quad y_{\max} = 0 \quad \max (0,0)$$



$$x = 2 \quad y_{\min} = 8 - 12 = -4 \quad \min (2,-4)$$

η f είναι αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$  και στο  $[2, +\infty)$

η f είναι φθίνουσα στο  $[0, 2]$

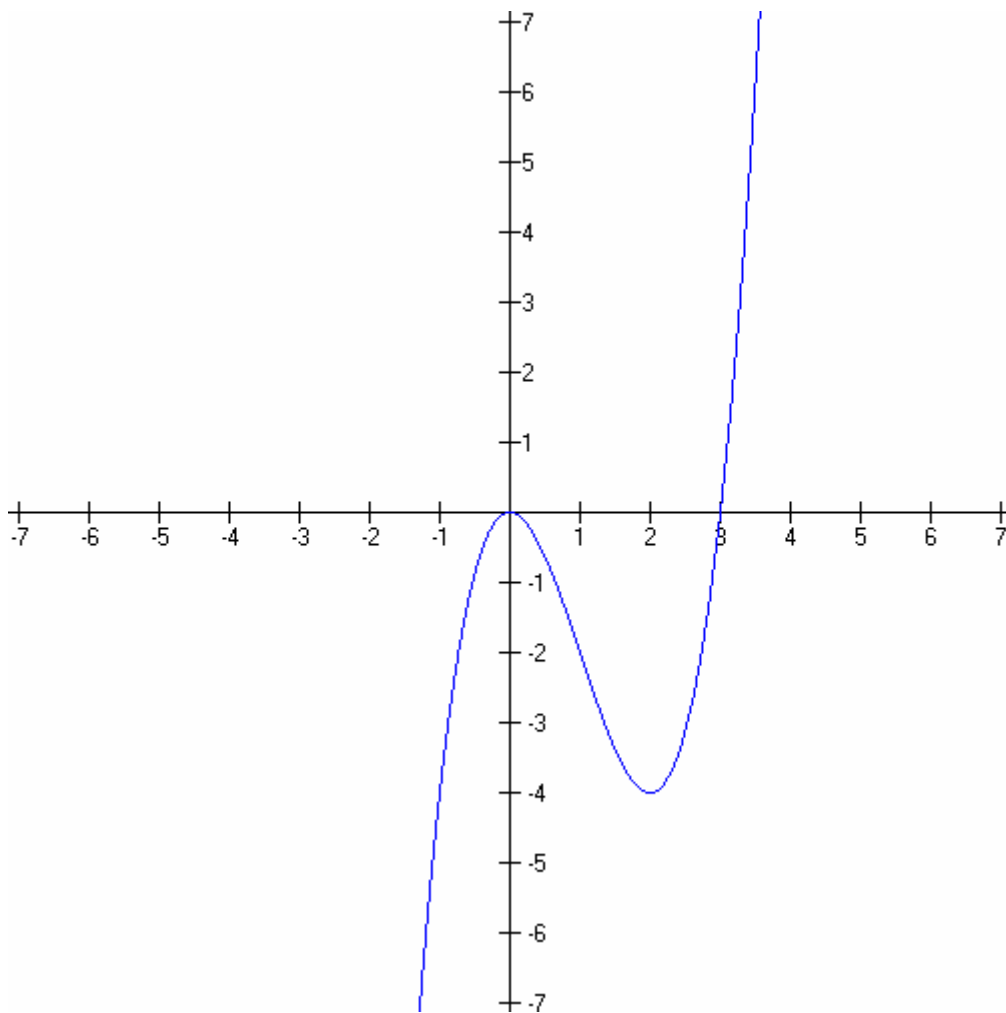
$$f''(x) = 6x - 6 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 6x - 6 = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

$$f''(x) = 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$y''$	-		+
y			

$\Sigma.K. (1,-2)$

$x=1 \quad y=1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2 \quad \Sigma.K. (1,-2)$



2. α) Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{15+10+13+14+15+15+9+10+17+12}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{130}{10} = 13$$

β) Η επικρατούσα τιμή είναι:  $x_\epsilon = 15$

γ) 9, 10, 10, 12, 13, 14, 15, 15, 15, 17

$$\text{Η διάμεσος είναι: } x_\delta = \frac{13+14}{2} = 13,5$$

δ) Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{(9-13)^2 + 2(10-13)^2 + (12-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 + 3(15-13)^2 + (17-13)^2}{10}} \\ &= \sqrt{\frac{16+18+1+0+1+12+16}{10}} \\ &= \sqrt{6,4} \approx 2,53\end{aligned}$$

3.

$$\alpha) \text{ i) } \binom{10}{3} = 120$$

$$\text{ii) } \binom{6}{2} \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 15 \cdot 4 + 20 = 80$$

$$\beta) P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{15 \cdot 4}{120} = \frac{1}{2}$$

4.

$$\alpha) y = \sigma \nu^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\sigma \nu x \cdot \eta \mu x = -\eta \mu 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\sigma \nu 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + 4y &= -2\sigma \nu 2x + 4\sigma \nu^2 x \\ &= -2(2\sigma \nu^2 x - 1) + 4\sigma \nu^2 x \\ &= -4\sigma \nu^2 x + 2 + 4\sigma \nu^2 x \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \int \sigma \nu^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \sigma \nu 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x + \frac{\eta \mu 2x}{2} \right] + c \end{aligned}$$

5.

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

$$\alpha) \text{ Π.Ο. } \mathbb{R} - \{2\}$$

$$y = \frac{3x+1}{x-2}$$

$$y(x-2) = 3x+1$$

$$yx - 2y = 3x+1$$

$$x(y-3) = 2y+1$$

$$x = \frac{2y+1}{y-3}$$

$$\text{Π.Τ. } \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\beta) f'(x) = \frac{3 \cdot (x-2) - (3x+1) \cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

γ) Οριζόντια ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (απροσδιόριστη μορφή) Εφαρμόζω De L'Hospital}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ (απροσδιόριστη μορφή) Εφαρμόζω De L'Hospital}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = 3$$

Άρα  $y = 3$  Ο.Α.

Κατακόρυφη ασύμπτωτη:  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

δ)  $x = 3$        $y = 10$        $A(3, 10)$

$$\lambda_{\text{εφ}} = -\frac{7}{3-2} = -7$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Α:

$$y - y_1 = \lambda_{\text{εφ}}(x - x_1)$$

$$y - 10 = -7(x - 3)$$

$$y - 10 = -7x - 21$$

$$y = -7x + 31$$