ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2007

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 29 Μαΐου 2007
7:30 – 10:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δύο (2) σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.
Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 x^2 dx$.

2. Το σημείο (1 , 2) είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης $y=αx^2 + 4x$. Να υπολογίσετε το α και να προσδιορίσετε το είδος του ακρότατου.

3. Δίνεται ο κύκλος : $x^2 + y^2 – 6x + 4y –12 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του και το μήκος της ακτίνας του.

4. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μία τριμελής επιτροπή από μία ομάδα 7 ατόμων;

5. Δίνεται η έλλειψη : $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$, α>β . Αν η εστιακή απόσταση είναι ΕΈ = 6 μονάδες και το μήκος του μικρού άξονα είναι Β΄Β = 8 μονάδες να βρείτε τα α και β και την εκκεντρότητά της .

6. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Να αποδείξετε ότι: $A+B=5A\cdot B$.

7. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της καμπύλης $y=x^2+1$, την ευθεία $x=2$ και τους άξονες Ox και Oy .

8. Αν A , B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(B)$, $P(A\cup B)$ και $P(A-B)$.

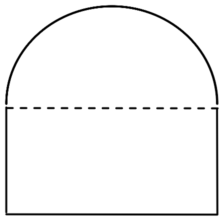
9. Να αποδείξετε ότι: $\left(\text{Τοξημx}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

10. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = e^x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις.
Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y=x^2e^x$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.

2. Ένα παράθυρο έχει περίμετρο 10 m και αποτελείται από ένα ορθογώνιο και ένα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου έτσι ώστε από το παράθυρο να διέρχεται ο μέγιστος φωτισμός, δηλαδή να έχει τη μέγιστη δυνατή επιφάνεια.



3. Δίνεται η παραβολή $y^2=8x$ και τα σημεία της $A(2t^2,4t)$ και $B(2\rho^2, 4\rho)$.

(α) Αν το AB περνά από το σημείο Γ(5,2)
(i) να δείξετε ότι $2t\rho+5= t+\rho$,
(ii) να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του AB.

(β) Αν επιπλέον το σημείο Γ είναι το μέσο του AB
(i) να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η (ε): $y=2x-8$.
(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία (ε) και την παραβολή.

4. Μια κάλπη περιέχει μια άσπρη, 4 κόκκινες και 5 πράσινες μπάλες. Κάποιος παίρνει τυχαία μια μπάλα από την κάλπη. Αν πάρει κόκκινη ή πράσινη δεν παίρνει άλλη μπάλα. Αν όμως πάρει την άσπρη τότε, χωρίς να την επανατοποθετήσει, παίρνει και δεύτερη μπάλα από την κάλπη.

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες:

(i) Να πήρε δύο μπάλες από την κάλπη.

(ii) Να πήρε κόκκινη μπάλα.

(β) Δεδομένου ότι πήρε κόκκινη μπάλα, να βρείτε την πιθανότητα αυτό να έγινε στην πρώτη επιλογή μπάλας.

5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο R με τις ιδιότητες:

(i) Η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο R.

(ii) $f(-x)=f(x)$, $\forall\, x \in R$.

(iii) $f(x+\alpha)=f(x)$, $\forall\, x \in R$, όπου $\alpha \neq 0$, σταθερός αριθμός.

(iv) $f(0)=0$.

Να αποδείξετε:

(α) $f'(-x) = -f'(x), \ \forall\, x \in R$.

(β) $f'(x+\alpha) = f'(x), \ \forall\, x \in R$.

(γ) $\int_0^\alpha x^2 f'(x)dx = -2\int_0^\alpha xf(x)dx$.

(δ) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=\alpha-y$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε: $2\int_0^\alpha xf(x)dx = \alpha\int_0^\alpha f(x)dx$.

(ε) Χρησιμοποιώντας το (γ) και (δ) να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha x^2 f'(x)dx = -\alpha\int_0^\alpha f(x)dx$.

----- ΤΕΛΟΣ -----