ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

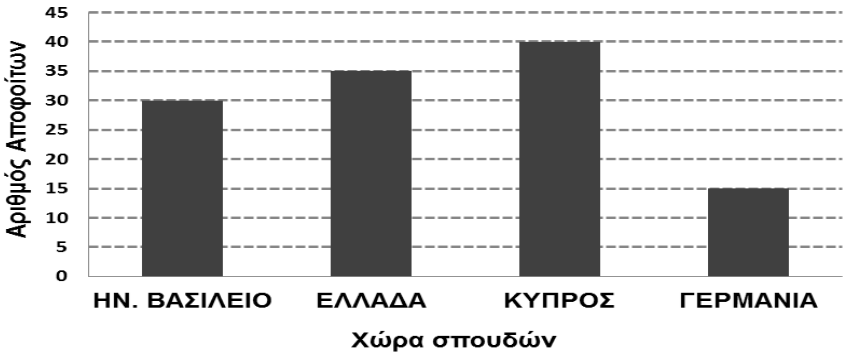
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 9 Ιουνίου 2017
8:00 π.μ. – 11:00 π.μ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων, φαίνεται η χώρα που επέλεξαν οι απόφοιτοι μαθητές ενός Λυκείου της Λευκωσίας για να ακολουθήσουν ανώτερες σπουδές.



(α) Να βρείτε τη χώρα που επέλεξαν οι λιγότεροι μαθητές για σπουδές.
(β) Να υπολογίσετε τον συνολικό αριθμό των μαθητών του πιο πάνω Λυκείου, που **δεν επέλεξαν** την Κύπρο για ανώτερες σπουδές.

Λύση:
(α) Γερμανία
(β) $30+35+15=80$ μαθητές που δεν επέλεξαν για σπουδές τη Κύπρο.

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

Λύση:
$x \neq 2$

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{4}$$

3.	Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση $(x-1)^2+(y+7)^2=36$ ***Λύση:*** $\left.\begin{aligned}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2\\(x-1)^2+(y+7)^2=36\end{aligned}\right\}\Rightarrow K(1,-7)$ $R=\sqrt{36}=6$	
4.	Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y=3x^4+\eta\mu x-1$, $x\in R$ ***Λύση:*** $\frac{dy}{dx}=12x^3+\sigma\upsilon\nu x+0$	
5.	Δίνεται η λέξη **ΛΕΜΥΘΟΥ** . Να βρείτε: (α) Το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς έχουν τα **Υ** συνεχόμενα. ***Λύση:*** (α) $M_7^{\varepsilon}=\frac{7!}{2!}=2520$ (β) $\boxed{Y,Y}\,\Lambda,E,M,\Theta,O$ $M_6=6!=720$	
6.	Σε μια εταιρεία εργάζονται 25 υπάλληλοι. Οι 4 υπάλληλοι έχουν μέσο μηνιαίο μισθό €2400 και οι υπόλοιποι έχουν μέσο μηνιαίο μισθό €1100. Να βρείτε το μέσο μηνιαίο μισθό όλων των υπαλλήλων της εταιρείας. ***Λύση:*** $\bar{x}=\frac{4\cdot 2400+21\cdot 1100}{25}=\frac{32700}{25}=1308$	
7.	Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3\left(3x^2+4x-2\right)dx$ ***Λύση:*** $\int_1^3\left(3x^2+4x-2\right)dx$ $\int_1^3\left(3x^2+4x-2\right)dx=[\frac{3x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-2x]_1^3$ $=[x^3+2x^2-2x]_1^3$ $=[3^3+2\cdot 3^2-2\cdot 3]-[1^3+2\cdot 1^2-2\cdot 1]$ $=39-1$ $=38$	

8. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + y = 5$

Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$

Λύση:

$x^2 + y^2 - 2x + y = 5$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y+1) = 2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{2y+1}$$

9. Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης με

$P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{3}{5}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{7}{20}$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(B')$

(β) $P(A \cup B)$

(γ) $P(A - B)$

Λύση:

(α)

$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$

(β)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{20} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$

(γ)

$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{20} = \dfrac{3}{20}$

10. Η συνάρτηση με τύπο $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta$ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $A(-1,6)$

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β όπου $\alpha, \beta \in R$.

(β) Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της Β(1, 8)

Λύση:

(α)

$y = x^3 + \alpha x^2 + \beta$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2\alpha x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2\alpha \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0,\ x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6(-1) + 2\alpha = 0 \Rightarrow\ \alpha = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 + \alpha x^2 + \beta \\ y = 6,\ x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 = (-1) + \alpha + \beta \Rightarrow\ \alpha + \beta = 7$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 7 \\ \alpha = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = 4$$

(β)

$$y = x^3 + 3x^2 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 9$$

$$y - y_1 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_1)$$

$$y - 8 = 9(x - 1)$$

$$y = 9x - 1$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τις ασύμπτωτες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης και στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

(α) Πεδίο ορισμού: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ Π.Ο. $\mathrm{R} - \{-2\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

Αν $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$

Αν $y = 0$, $x^2 + 4x + 5 = 0$, Δ<0 $\Rightarrow$ Δεν τέμνει τον άξονα xx΄

Άρα τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο $\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y' = \frac{(2x+4)\cdot(x+2)-(x^2+4x+5)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+4x+8-x^2-4x-5}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$x \neq -2$

$y' = 0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow (x+1)(x+3)=0 \Rightarrow x=-1,\ x=-3$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y΄		+	0	-	‖	-	0	+	
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$\max(-3,-2)$ $\min(-1,2)$

Για $x=-3 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow (-3,-2)$ τοπικό μέγιστο

Για $x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (-1,2)$ τοπικό ελάχιστο

Αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-3]$ και $[-1,+\infty)$

Φθίνουσα στα διαστήματα $[-3,-2)$ και $(-2,-1]$

(δ) **Ασύμπτωτες**

Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^2+4x+5}{x+2} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^2+4x+5}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2 \text{ Κατακόρυφη ασύμπτωτη}$$

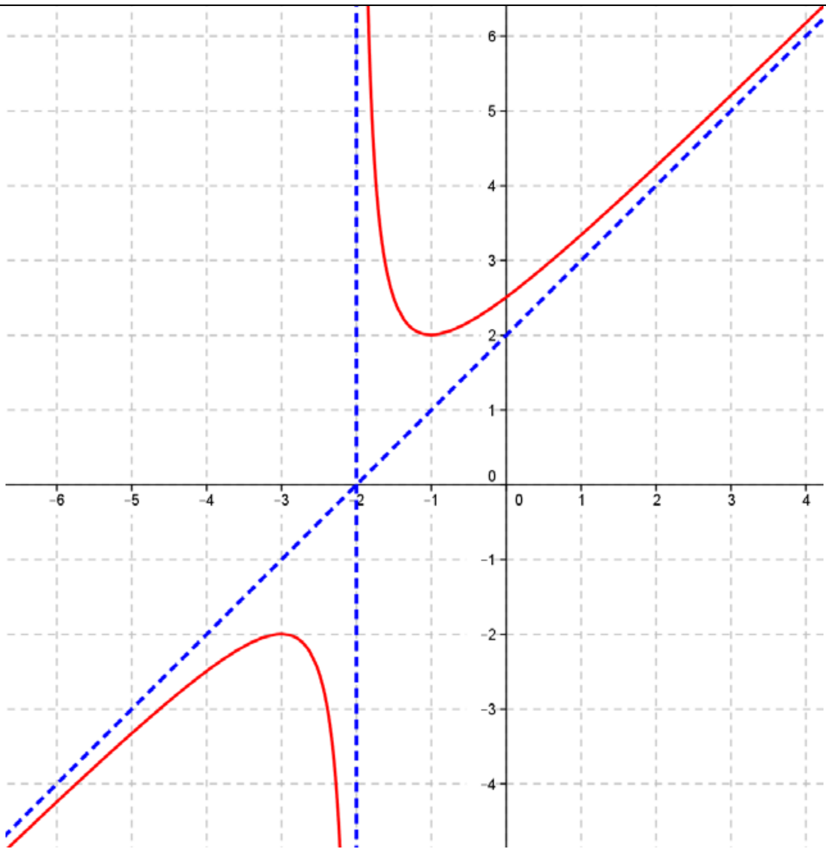
Πλάγια ασύμπτωτη:

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x+5 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^2-2x & \\ \cline{1-1} & x+2 \\ 2x+5 & \\ -2x-4 & \\ \cline{1-1} +1 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=0$$

$y=x+2$ πλάγια ασύμπτωτη



2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει το βαθμό δέκα μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών Θεωρητικής Κατεύθυνσης του Α΄ Τετραμήνου.

Βαθμός (x_i)	15	16	17	18	20
Αριθμός μαθητών (f_i)	2	2	2	3	1

(α) Να βρείτε:

(i) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των βαθμών.

(ii) Τη μέση τιμή $(\overline{x})$ των βαθμών.

(iii) Την τυπική απόκλιση (σ) των βαθμών.

(β) Επιλέγεται τυχαία ένας από τους πιο πάνω μαθητές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό 20 στο μάθημα των Μαθηματικών Θεωρητικής Κατεύθυνσης στο Α΄ Τετράμηνο.

Λύση:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
15	2	30	4	8
16	2	32	1	2
17	2	34	0	0
18	3	54	1	3
20	1	20	9	9
	$\sum f_i = 10$	$\sum x_i \cdot f_i = 170$		$\sum f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 = 22$

(α) (i) $x_\varepsilon = 18$

(ii) $\overline{x} = \dfrac{170}{10} = 17$

(iii) $\sigma = \sqrt{\dfrac{22}{10}} = \sqrt{2,2} \approx 1,48$

(β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

A: «Ο μαθητής έχει βαθμό 20 στο μάθημα των Μαθηματικών Θεωρητικής Κατεύθυνσης.»

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{10}$$

3. Σε ένα τμήμα 18 μαθητών μιας Τεχνικής Σχολής, οι 8 μαθητές προέρχονται από το χωριό Α. Από τους 18 μαθητές, θα επιλεγεί τυχαία ομάδα 5 μαθητών για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια τελετή στο Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.

(α) Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλεγεί η ομάδα, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

(β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων στην πενταμελή ομάδα :

K: «Να μη συμμετέχει κανένας μαθητής από το χωριό Α»

Λ: «Να συμμετέχουν ακριβώς 3 μαθητές από το χωριό Α»

M: «Να συμμετέχουν τουλάχιστον 4 μαθητές από το χωριό Α»

Λύση:

(α) $\dbinom{18}{5} = \dfrac{18!}{5!13!} = 8568$

(β) $P(K) = \dfrac{\dbinom{10}{5}}{\dbinom{18}{5}} = \dfrac{252}{8568} = \dfrac{1}{34}$

$$P(\Lambda) = \frac{\dbinom{8}{3}\cdot\dbinom{10}{2}}{\dbinom{18}{5}} = \frac{2520}{8568} = \frac{5}{17}$$

$$P(M) = \frac{\dbinom{8}{4}\cdot\dbinom{10}{1}+\dbinom{8}{5}}{\dbinom{18}{5}} = \frac{70\cdot 10+56}{8568} = \frac{756}{8568} = \frac{3}{34}$$

4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=\sqrt{x+1}$ ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$

Λύση:

$u=\sqrt{x+1} \Rightarrow u^2=x+1$

$x=u^2-1$

$dx=2udu$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{\left(u^2-1\right)^2}{u}\cdot 2udu=$$

$$=2\int\left(u^4-2u^2+1\right)du=$$

$$=2\left[\frac{u^5}{5}-\frac{2u^3}{3}+u\right]+c=$$

$$=2\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}+\sqrt{x+1}\right]+c$$

5. Δίνεται η καμπύλη με τύπο $y=x+\sqrt{x^2+4}$

Να δείξετε ότι :

(α) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}$

(β) $\left(x^2+4\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$

Λύση:

(α) $y=x+\sqrt{x^2+4}$

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}=$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+4}}$$

(β) Α΄ τρόπος:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot\sqrt{x^2+4}=y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{x^2+4}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(x^2+4\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+4}=0$$

$$\left(x^2+4\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

Β΄ τρόπος:

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+4}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=$$

$$=\frac{x^2+4-x^2}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+4}}=\frac{4}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+4}}$$

$$\left(x^2+4\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=\left(x^2+4\right)\cdot\frac{4}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+4}}+x\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)-\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}+x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}-x-\sqrt{x^2+4}=$$

$$=\frac{4+x^2-x^2-4}{\sqrt{x^2+4}}=0$$