ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

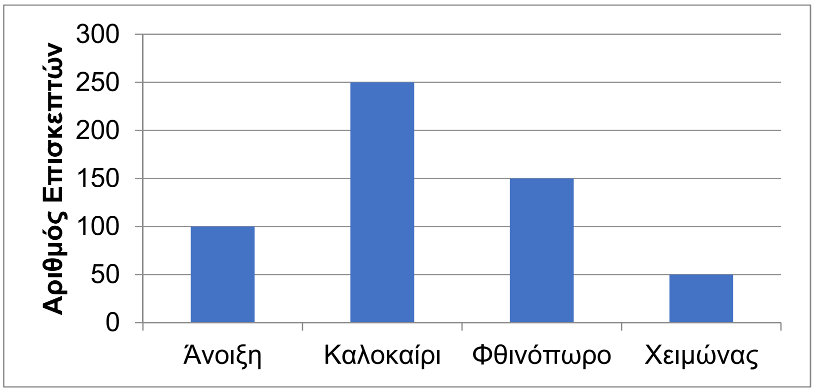
1. Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $4\ \mathrm{m}$, $8\ \mathrm{m}$ και $5\ \mathrm{m}$.

Λύση

Έχουμε:

$$V = E_\beta \cdot \upsilon \Rightarrow V = 4 \cdot 8 \cdot 5 \Rightarrow V = 160\ \mathrm{m}^3$$

2. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των επισκεπτών ανά εποχή σε ένα ηλιακό πάρκο το έτος 2016.



Να βρείτε πόσοι ήταν οι επισκέπτες του πάρκου:

(α) το Φθινόπωρο του 2016 **(2 μονάδες)**

(β) το έτος 2016 **(3 μονάδες)**

Λύση

(α) 150 επισκέπτες

(β) $100 + 250 + 150 + 50 = 550$ επισκέπτες

3. Ο αριθμός των πτήσεων που αναχώρησαν από το Διεθνές Αεροδρόμιο Πάφου προς ευρωπαϊκούς προορισμούς σε μια συγκεκριμένη εβδομάδα ήταν:

9	8	10	9	7	6	14

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των πτήσεων προς ευρωπαϊκούς προορισμούς την εβδομάδα αυτή.

Λύση

Αν $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή του αριθμού των πτήσεων που αναχωρούν από το Διεθνές Αεροδρόμιο Πάφου προς ευρωπαϊκούς προορισμούς και $x_i, i = 1, 2, \dots, 7$ ο αριθμός των αναχωρήσεων την i –ημέρα της εβδομάδας, τότε έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_7}{7} = \frac{9 + 8 + 10 + 9 + 7 + 6 + 14}{7} = \frac{63}{7} = 9 \text{ πτήσεις}$$

4. Η ακμή της βάσης ορθού τετραγωνικού πρίσματος είναι 5 cm και το ύψος του είναι 7 cm. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος **(2,5 μονάδες)**

(β) τον όγκο του πρίσματος **(2,5 μονάδες)**

Λύση

(α) Συμβολίζουμε με a την ακμή της βάσης και με υ το ύψος του ορθού τετραγωνικού πρίσματος, αντίστοιχα. Τότε, έχουμε:

$$E_\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon \Rightarrow E_\pi = 4a \cdot \upsilon \Rightarrow E_\pi = 4 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow E_\pi = 140 \text{ cm}^2$$

(β) Έχουμε:

$$V = E_\beta \cdot \upsilon \Rightarrow V = a^2 \cdot \upsilon \Rightarrow V = 5^2 \cdot 7 \Rightarrow V = 175 \text{ cm}^3$$

5. Μία κομμώτρια θέλει να αγοράσει ένα ψαλίδι, του οποίου η τιμή χωρίς ΦΠΑ είναι €250. Πόσα θα πληρώσει για το ψαλίδι, αν ο συντελεστής του ΦΠΑ είναι 19%;

Λύση

Το ποσό που πρέπει να πληρωθεί ως ΦΠΑ είναι:

$$\frac{19}{100} \cdot 250 = €47{,}50$$

Επομένως, η κομμώτρια θα πληρώσει για το συγκεκριμένο ψαλίδι:

$$250 + 47{,}50 = €297{,}50$$

6. Η ακτίνα της βάσης ενός κώνου είναι $6\ \mathrm{cm}$ και το ύψος του είναι $8\ \mathrm{cm}$.
Να υπολογίσετε:

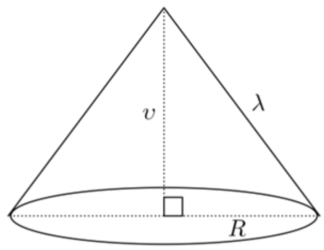
(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου **(3 μονάδες)**

(β) τον όγκο του κώνου **(2 μονάδες)**

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και παίρνουμε:

$$\lambda^2 = R^2 + \upsilon^2 \Rightarrow \lambda^2 = 6^2 + 8^2$$
$$\Rightarrow \lambda^2 = 36 + 64 = 100$$
$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{100} = 10\ \mathrm{cm}$$



Επομένως, το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι:

$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta \Rightarrow E_{o\lambda} = \pi R\lambda + \pi R^2 \Rightarrow E_{o\lambda} = \pi 6 \cdot 10 + \pi 6^2$$
$$\Rightarrow E_{o\lambda} = 60\pi + 36\pi \Rightarrow E_{o\lambda} = 96\pi\ \mathrm{cm}^2$$

(β) Έχουμε:

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot \upsilon}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi 6^2 \cdot 8}{3} \Rightarrow V = 96\pi\ \mathrm{cm}^3$$

7. Ένας επιπλοποιός πώλησε μια τραπεζαρία με ζημιά 4% πάνω στο κόστος κατασκευής της και εισέπραξε €624.

(α) Να βρείτε το κόστος κατασκευής της τραπεζαρίας. **(2,5 μονάδες)**

(β) Πόσα χρήματα θα εισέπραττε ο επιπλοποιός, αν πωλούσε την τραπεζαρία με κέρδος 8% πάνω στο κόστος κατασκευής της; **(2,5 μονάδες)**

Λύση

(α) Το ποσό των €624 αντιπροσωπεύει το 96% του κόστους κατασκευής της τραπεζαρίας.
Επομένως, αν με x συμβολίσουμε το ποσό που αντιστοιχεί στο κόστος κατασκευής της τραπεζαρίας, έχουμε:

$$\frac{96}{100} \cdot x = 624 \Rightarrow x = \frac{624 \cdot 100}{96} \Rightarrow x = €650$$

(β) Αν με y συμβολίσουμε το ποσό που αντιστοιχεί στο 108% του κόστους κατασκευής της τραπεζαρίας, έχουμε:

$$y = \frac{108}{100} \cdot 650 \Rightarrow y = €702$$

8. Το ύψος ενός κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του. Αν ο όγκος του είναι $54\pi\ \mathrm{cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

Λύση

Συμβολίζουμε με x την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και με $2x$ το ύψος του, δηλαδή $R = x$ και $\upsilon = 2x$.

Έχουμε:

$$V = \pi R^2 \cdot \upsilon \Rightarrow 54\pi = \pi x^2 \cdot 2x \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3\ \mathrm{cm}$$

Η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι $R = 3\ \mathrm{cm}$ και το ύψος του $\upsilon = 6\ \mathrm{cm}$.

Έχουμε:

$$E_{o\lambda} = E_{\kappa} + 2E_{\beta} \Rightarrow E_{o\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 \Rightarrow E_{o\lambda} = 2\pi 3 \cdot 6 + 2\pi 3^2$$
$$\Rightarrow E_{o\lambda} = 36\pi + 18\pi \Rightarrow E_{o\lambda} = 54\pi\ \mathrm{cm}^2$$

9. Σε μια βάρκα επιβαίνουν 8 άτομα με μέση μάζα $63\ \mathrm{kg}$. Η βάρκα κατασκευάστηκε για να μεταφέρει άτομα, των οποίων η συνολική μάζα να μην υπερβαίνει τα $800\ \mathrm{kg}$. Στη βάρκα θα επιβιβαστούν άλλα 4 άτομα. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή μέση μάζα των 4 ατόμων που θα επιβιβαστούν;

Λύση

Συμβολίζουμε με $\bar{x}$ την μέση μάζα των 8 ατόμων που επιβαίνουν στη βάρκα και με $x_i, i = 1, 2, 3, \dots, 8$ την μάζα του καθενός ατόμου πάνω στη βάρκα. Έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_8}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 63 \cdot 8 = 504$$

Επομένως, η συνολική μάζα των 4 ατόμων που θα επιβιβαστούν στη βάρκα πρέπει να είναι το πολύ $800 - 504 = 296\ \mathrm{kg}$. Άρα, η μέγιστη δυνατή μέση μάζα $(\bar{y})$ των 4 αυτών ατόμων είναι:

$$\bar{y} = \frac{296}{4} = 74\ \mathrm{kg}$$

10. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $260\ \mathrm{cm}^2$ και το παράπλευρο ύψος της είναι $13\ \mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας **(2,5 μονάδες)**

(β) τον όγκο της πυραμίδας **(2,5 μονάδες)**

Λύση

(α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι $260\ \mathrm{cm}^2$. Έχουμε:

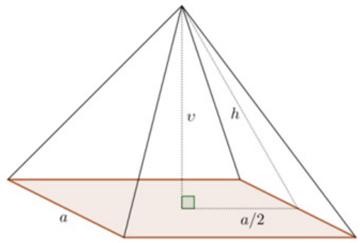
$$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} \Rightarrow 260 = \frac{4a \cdot 13}{2} \Rightarrow 26a = 260 \Rightarrow a = 10\ \mathrm{cm}$$

Επομένως, το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι:

$$E_{o\lambda} = E_\beta + E_\pi \Rightarrow E_{o\lambda} = a^2 + E_\pi \Rightarrow E_{o\lambda} = 10^2 + 260 \Rightarrow E_{o\lambda} = 360\ \mathrm{cm}^2$$

(β) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και παίρνουμε:

$$h^2 = \upsilon^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow 13^2 = \upsilon^2 + 5^2$$
$$\Rightarrow \upsilon^2 = 169 - 25 = 144$$
$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{144} = 12\ \mathrm{cm}$$



Επομένως, ο όγκος της πυραμίδας είναι:

$$V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} \Rightarrow V = \frac{10^2 \cdot 12}{3} = 400\ \mathrm{cm}^3$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Ένα κείμενο υπαγορεύτηκε σε 80 μαθητές και τα ορθογραφικά λάθη που έγιναν από κάθε μαθητή φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Αριθμός Λαθών (x_i)	0	1	2	3	4	5	8
Αριθμός Μαθητών (f_i)	10	22	23	15	6	3	1

Να υπολογίσετε:

(α) την επικρατούσα τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων **(2 μονάδες)**

(β) τη μέση τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων **(3 μονάδες)**

(γ) την τυπική απόκλιση των πιο πάνω παρατηρήσεων (με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων) **(3 μονάδες)**

(δ) το ποσοστό επί τοις εκατόν των μαθητών που έκαναν μέχρι και 2 ορθογραφικά λάθη **(2 μονάδες)**

Λύση

(α) Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων είναι $x_\varepsilon = 2$.

(β) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{10 \cdot 0 + 22 \cdot 1 + 23 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 8}{80} = \frac{160}{80} = 2$$

(γ) Κατασκευάζουμε τον πιο κάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

(x_i)	(f_i)	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
0	10	$(0-2)^2 = 4$	40
1	22	$(1-2)^2 = 1$	22
2	23	$(2-2)^2 = 0$	0
3	15	$(3-2)^2 = 1$	15
4	6	$(4-2)^2 = 4$	24
5	3	$(5-2)^2 = 9$	27
8	1	$(8-2)^2 = 36$	36
	$\Sigma f_i = 80$		$\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2 = 164$

Επομένως, η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων (με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων) είναι:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{164}{80}} \cong 1{,}43$$

(δ) Οι μαθητές που έκαναν μέχρι και 2 ορθογραφικά λάθη είναι $10 + 22 + 23 = 55$. Επομένως, το ποσοστό επί τοις εκατόν των μαθητών που έκαναν μέχρι και 2 ορθογραφικά λάθη είναι:

$$\frac{55}{80} \cdot 100 = 68{,}75\%$$

2. Ένα δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος $9\ \mathrm{cm}$, πλάτος $6\ \mathrm{cm}$ και ύψος $15\ \mathrm{cm}$. Μέσα στο δοχείο υπάρχουν δύο κύβοι ακμής α και ποσότητα νερού, το οποίο καλύπτει πλήρως και τους δύο κύβους. Αν αφαιρεθούν από το δοχείο και οι δύο κύβοι, η στάθμη του νερού θα κατέβει $1\ \mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της ακμής του κύβου.

Λύση

Ο όγκος των δύο κύβων είναι ίσος με τον όγκο του νερού που «υποχωρεί» μέσα στο δοχείο. Αν συμβολίσουμε με υ το ύψος του νερού που «υποχωρεί», τότε ο όγκος των δύο κύβων είναι:

$$V = E_\beta \cdot \upsilon = 9 \cdot 6 \cdot 1 = 54\ \mathrm{cm}^3$$

Επομένως, ο όγκος ενός κύβου είναι $54 : 2 = 27\ \mathrm{cm}^3$ και το μήκος της ακμής της βάσης του είναι:

$$V = \alpha^3 \Rightarrow \alpha^3 = 27 \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{27} = 3\ \mathrm{cm}$$

3. Στο πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η κατανομή των 1440 κρατήσεων σε ένα τουριστικό κατάλυμα για τους μήνες Ιούνιο, Ιούλιο, Αύγουστο και Σεπτέμβριο. Οι κρατήσεις για τον μήνα Σεπτέμβριο είναι 20 λιγότερες από τις κρατήσεις για τον μήνα Αύγουστο.

Να υπολογίσετε:

(α) τον αριθμό των κρατήσεων για τον μήνα Ιούνιο **(4 μονάδες)**

(β) τον αριθμό των κρατήσεων για τον μήνα Αύγουστο **(6 μονάδες)**

Λύση

(α) Στο κυκλικό διάγραμμα η γωνία που αντιστοιχεί στον αριθμό των κρατήσεων για τον μήνα Ιούνιο είναι $75°$.

Επομένως, ο αριθμός των κρατήσεων για τον μήνα Ιούνιο είναι:

$$\frac{75}{360} \cdot 1440 = 300$$

(β) Ομοίως, ο αριθμός των κρατήσεων για τον μήνα Ιούλιο είναι:

$$\frac{90}{360} \cdot 1440 = 360$$

Συμβολίζουμε με x τον αριθμό των κρατήσεων του μήνα Αυγούστου. Επομένως, οι κρατήσεις για τον μήνα Σεπτέμβριο είναι $x - 20$. Έχουμε:

$$x + x - 20 + 360 + 300 = 1440 \Rightarrow 2x = 800 \Rightarrow x = 400$$

4. Ένας φρουτέμπορος αγόρασε 1200 κιλά ροδάκινα προς €2 το κιλό. Κατά την μεταφορά σάπισαν μερικά. Ο φρουτέμπορος κράτησε 60 κιλά ροδάκινα για την οικογένειά του και τα υπόλοιπα τα πώλησε προς €4 το κιλό. Αν το ποσοστό κέρδους του φρουτέμπορου ήταν 60% πάνω στο κόστος της αγοράς των ροδάκινων, να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατόν των ροδάκινων που σάπισαν.

Λύση

Ο φρουτέμπορος ξόδεψε $1200 \cdot 2 = €2400$ για την αγορά των ροδάκινων.

Ο φρουτέμπορος εισέπραξε ποσό που αντιστοιχεί στο 160% των €2400. Επομένως, το ποσό της είσπραξης είναι:

$$\frac{160}{100} \cdot 2400 = €3840$$

Αφού η τιμή πώλησης ενός κιλού ροδάκινων είναι €4, τότε ο φρουτέμπορος πώλησε $3840 : 4 = 960$ κιλά ροδάκινα.

Άρα, τα κιλά των ροδάκινων που σάπισαν ήταν $1200 - 960 - 60 = 180$ και το ποσοστό που αντιπροσωπεύουν τα κιλά αυτά είναι:

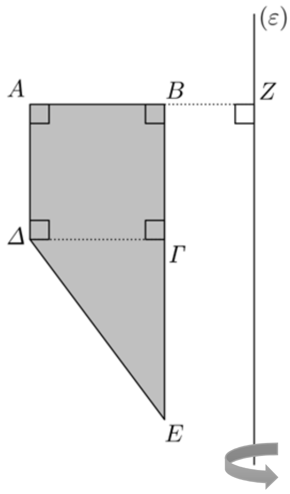
$$\frac{180}{1200} \cdot 100 = 15\%$$

5. Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο με $AB = 3\text{ cm}$ και το $ΔΓΕ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{Γ} = 90°$ και $ΔΕ = 5\text{ cm}$. Το τετράπλευρο $ΑΒΕΔ$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $(ε)$, που είναι παράλληλη προς την $ΒΕ$ και απέχει από αυτήν απόσταση $BZ = 2\text{ cm}$.

Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού **(5 μονάδες)**

(β) τον όγκο του παραγόμενου στερεού **(5 μονάδες)**



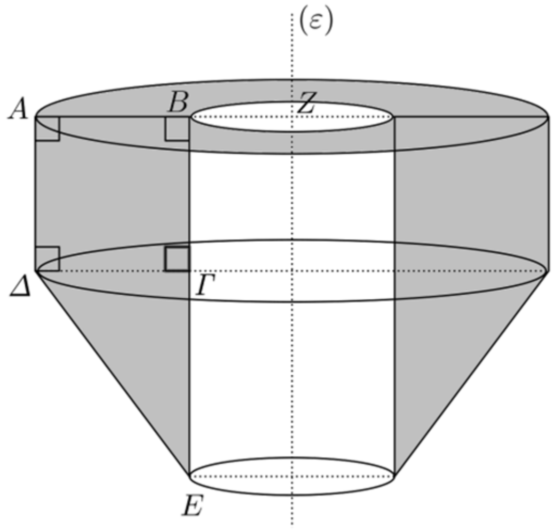
Λύση

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΔΓΕ$, για να υπολογίσουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΓΕ$. Έχουμε:

$$(ΔΕ)^2 = (ΔΓ)^2 + (ΓΕ)^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + (ΓΕ)^2 \Rightarrow 25 = 9 + (ΓΕ)^2$$
$$\Rightarrow (ΓΕ)^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow (ΓΕ) = \sqrt{16} = 4\text{ cm}$$

Επομένως:

$$(ΒΕ) = (ΒΓ) + (ΓΕ) = 3 + 4 = 7\text{ cm}$$

Κύλινδρος BE	Κύλινδρος $A\Delta$	Κόλουρος κώνος ΔE	
$R_1 = 2\text{ cm}$ $\upsilon_1 = 7\text{ cm}$	$R_2 = 5\text{ cm}$ $\upsilon_2 = 3\text{ cm}$	$R_3 = 5\text{ cm}$ $\rho_3 = 2\text{ cm}$ $\lambda_3 = 5\text{ cm}$ $\upsilon_3 = 4\text{ cm}$	

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού είναι:

$$
\begin{aligned}
E_{o\lambda} &= E_{AB} + E_{BE} + E_{\Delta E} + E_{A\Delta} \\
&= \pi R_2^2 - \pi R_1^2 + 2\pi R_1 \upsilon_1 + \pi(R_3 + \rho_3)\lambda + 2\pi R_2 \upsilon_2 \\
&= \pi 5^2 - \pi 2^2 + 2\pi 2 \cdot 7 + \pi(5+2)5 + 2\pi 5 \cdot 3 \\
&= 25\pi - 4\pi + 28\pi + 35\pi + 30\pi \\
&= 114\pi \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

(β) Ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι:

$$
\begin{aligned}
V_{o\lambda} &= V_{A\Delta} + V_{\Delta E} - V_{BE} \\
&= \pi R_2^2 \upsilon_2 + \frac{\pi \upsilon_3}{3}\left(R_3^2 + R_3\rho_3 + \rho_3^2\right) - \pi R_1^2 \upsilon_1 \\
&= \pi 5^2 \cdot 3 + \frac{\pi 4}{3}\left(5^2 + 2 \cdot 5 + 2^2\right) - \pi 2^2 \cdot 7 \\
&= 75\pi + 52\pi - 28\pi \\
&= 99\pi \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$