ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

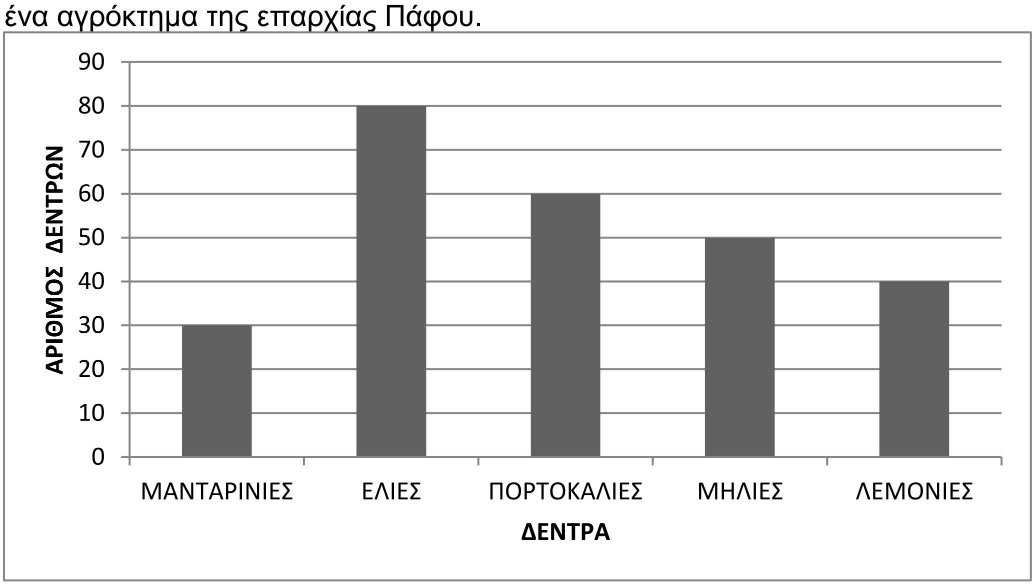
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Παρασκευή, 26 Μαΐου 2017**
8:00 π.μ. – 11:00 π.μ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

1.

Το πιο κάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζει πόσα δέντρα κάθε είδους υπάρχουν σε ένα αγρόκτημα της επαρχίας Πάφου.



Να βρείτε:

α) Πόσες μανταρινιές υπάρχουν στο αγρόκτημα.

β) Πόσα είναι όλα τα δέντρα στο αγρόκτημα.

Λύση:

α) 30 μανταρινιές

β) 30+80+60+50+40= 260 δέντρα

2.

Αυτοκίνητο αξίας €9500 πωλήθηκε με έκπτωση 15% πάνω στην αξία του. Να υπολογίσετε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου.

Λύση:

Α τρόπος $9500\cdot\frac{85}{100}=8075$**€**

Β τρόπος:

$$9500\cdot\frac{15}{100}=1425$$

$$9500-1425=8075$$

3.	Ορθό πρίσμα έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 5cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 8cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος. **Λύση** $\Pi_{\beta}\cdot = 3\cdot 5\cdot = 15\text{cm}$ $E_{\pi} = \Pi_{\beta}\cdot \upsilon = 15\cdot 8 = 120\text{cm}^2$ Β΄τρόπος $E_{\pi} = \Pi_{\beta}\cdot \upsilon = 3\cdot 5\cdot 8 = 120\text{cm}^2$	
4.	α) Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης; β) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μία φορά. Να βρείτε: i. Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης. ii. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «το ζάρι φέρει άρτια ένδειξη». α) Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης β) i) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ii) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	
5.	Ο όμιλος φωτογραφίας ενός σχολείου αποτελείται από 10 μαθήτριες και 8 μαθητές. Πρόκειται να επιλεγεί μια ομάδα πέντε ατόμων από τα μέλη του ομίλου, για να πραγματοποιηθεί μια φωτογράφηση. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η ομάδα: α) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός. β) Αν θα αποτελείται από τρεις μαθήτριες και δύο μαθητές. α) $\binom{18}{5} = \frac{18!}{5!\cdot 13!} = 8568$ β) $\binom{10}{3}\cdot\binom{8}{2} = \frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{8!}{2!6!} = 120\cdot 28 = 3360$	

6.

Μια άδεια πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος 12m και πλάτος 5m. Για να γεμίσει πλήρως η πισίνα με νερό αδειάζουμε σε αυτή 15 ντεπόζιτα γεμάτα νερό, που έχουν σχήμα κύβου ακμής 2m.
Να υπολογίσετε το βάθος της πισίνας.

Λύση:

$$V_{κύβου} = α^3 = 2^3 = 8m^3$$

$$V_{παρ} = 15 \cdot V_{κύβου} = 15 \cdot 8 = 120m^3$$

$$V_{παρ} = α \cdot β \cdot γ$$

$$12 \cdot 5 \cdot γ = 120 \Rightarrow$$

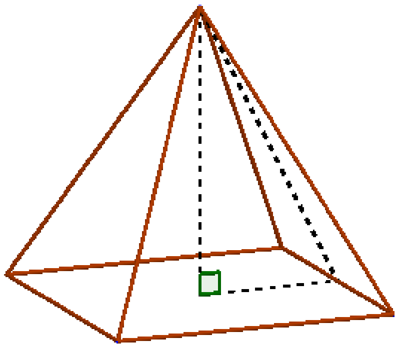
$$γ = \frac{120}{60} \Leftrightarrow γ = 2m$$

7.

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης 324cm^2 και παράπλευρο ύψος 15cm .

Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
β) Τον όγκο της πυραμίδας.



Λύση

α)

$$E_β = 324cm^2$$

$$α^2 = 324 \Leftrightarrow α = 18cm$$

$$h^2 = υ^2 + \left(\frac{α}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 15^2 = υ^2 + 9^2 \Leftrightarrow υ = 12cm$$

$$E_π = \frac{Π_β \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 18 \cdot 15}{2} = 540cm^2$$

$$E_{ολ} = E_β + E_π = 324 + 540 = 864cm^2$$

$$β)\ V = \frac{E_β \cdot υ}{3} = \frac{324 \cdot 12}{3} = 1296cm^3$$

8.

Η μέση τιμή των μισθών των υπαλλήλων μιας εταιρείας ήταν €1200. Στην εταιρεία προσλαμβάνεται ένας νέος υπάλληλος με μισθό €1100. Η νέα μέση τιμή των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας είναι τώρα €1180. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της εταιρείας μετά την πρόσληψη του νέου υπαλλήλου.

α΄ τρόπος

Λύση

$$\overline{x}_v = \frac{\Sigma f_i \cdot x_i}{v} \Leftrightarrow \Sigma f_i \cdot x_i = 1200 \cdot v$$

$$\overline{x}_{v+1} = \frac{\Sigma f_i \cdot x_i + x_{v+1}}{v+1} \Leftrightarrow 1180 = \frac{1200v + 1100}{v+1} \Leftrightarrow$$

$$1200v + 1100 = 1180v + 1180 \Leftrightarrow 20v = 80 \Leftrightarrow v = 4$$

Οι υπάλληλοι είναι 5

β΄ τρόπος:

$$1200 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_v}{v} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_v = 1200v$$

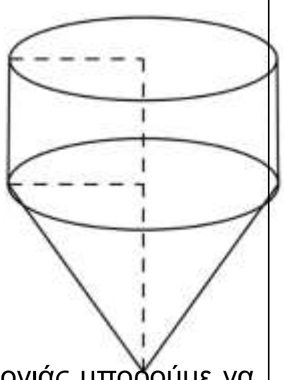
$$1180 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_v + x_{v+1}}{v+1} \Leftrightarrow 1180 = \frac{1200v + 1100}{v+1}$$

$$1200v + 1100 = 1180v + 1180 \Leftrightarrow 20v = 80 \Leftrightarrow v = 4$$

Οι υπάλληλοι είναι 5

9.

Μια εταιρεία θα κατασκευάσει με λαμαρίνα ένα σιλό για αποθήκευση σιτηρών όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για την κατασκευή θα χρησιμοποιηθούν ένας κώνος και ένας κύλινδρος με ανοικτές και ίσες βάσεις. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με $60\pi m^2$ και η γενέτειρα του είναι ίση με 10m. Το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με 5m.



Να υπολογίσετε:

α) Τον όγκο του σιλό.

β) Πόσα λίτρα μπογιάς θα χρειαστούμε για να βάψουμε την εξωτερική επιφάνεια της κατασκευής, αν με κάθε λίτρο μπογιάς μπορούμε να βάψουμε $9{,}42m^2$ (Δίνεται π=3,14).(Το πάχος της λαμαρίνας θεωρείται αμελητέο)

ΛΥΣΗ

α) $E_\kappa = \pi R\lambda \Rightarrow 60\pi = \pi R \cdot 10 \Leftrightarrow R = 6$

$$\upsilon_{\kappa\omega\nu} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi \cdot 6^2 \cdot 5 = 180\pi$$

$$V_{\kappa\omega\nu} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 96\pi$$

$$V = V_{\kappa\upsilon\lambda} + V_{\kappa\omega\nu} = 180\pi + 96\pi = 276\pi m^3$$

β) $E_{o\lambda.} = E_{K\kappa\omega\nu o\upsilon} + E_{K\kappa\upsilon\lambda\iota\nu\delta\rho o\upsilon}$

$$E_{o\lambda.} = 2\pi \cdot 6 \cdot 5 + 60\pi = 120\pi = 376{,}8m^2$$

$\Rightarrow 376{,}8 \div 9{,}42 = 40$ λίτρα μπογιάς

10. Δύο πόλεις Α και Β συνδέονται με ένα δρόμο μήκους 405km. Από την πόλη Α ξεκίνησε ένα φορτηγό με προορισμό την πόλη Β. Την ίδια στιγμή από την πόλη Β ξεκίνησε ένα λεωφορείο με προορισμό την πόλη Α, με ταχύτητα 15km/h μεγαλύτερη της ταχύτητας του φορτηγού. Οι ταχύτητες των δυο οχημάτων είναι σταθερές. Να βρείτε την ταχύτητα του φορτηγού, αν τα δύο οχήματα συναντηθήκαν μετά από 3 ώρες.

$U_2 = U_1 + 15$,

$t_1 = t_2 = 3h$

$S_1 + S_2 = 405 \Rightarrow$

$U_1 \cdot t_1 + U_2 \cdot t_2 = 405$

$U_1 \cdot 3 + (U_1 + 15) \cdot 3 = 405 \Leftrightarrow$

$6U_1 = 360 \Leftrightarrow$

$U_1 = 60km/h$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1.

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον ημερήσιο αριθμό των ασθενών που επισκέφθηκαν το Κέντρο Υγείας ενός χωριού της Κύπρου, κατά τον Απρίλιο του 2017.

Αριθμός ασθενών ($χ_i$)	4	5	6	7	8	9
Αριθμός ημερών (f_i)	5	2	4	5	5	9

Να βρείτε:

α) Την επικρατούσα τιμή ($χ_ε$) των παρατηρήσεων.

β) Τη διάμεσο τιμή ($χ_δ$) των παρατηρήσεων.

γ) Τη μέση τιμή ($\overline{χ}$) των παρατηρήσεων.

δ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

α)

x_i	f_i	$x_i f_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$f_i(\bar{x} - x_i)^2$
4	5	20	9	45
5	2	10	4	8
6	4	24	1	4
7	5	35	0	0
8	5	40	1	5
9	9	81	4	36
	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i \cdot x_i = 210$		$\Sigma f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 = 98$

$x_ε = 9$

$$x_δ = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = 7$$

β) $$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{210}{30} = 7$$

γ) $$σ = \sqrt{\frac{\Sigma f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{98}{30}} \approx 1.81$$

2. Δίνεται η λέξη **ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ**.

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

β) Παίρνουμε τυχαία ένα από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς.

Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: «Ο αναγραμματισμός αρχίζει με Ρ και τελειώνει σε Γ»

Β: «Ο αναγραμματισμός έχει όλα τα φωνήεντα μαζί»

Γ: «Ο αναγραμματισμός αρχίζει με φωνήεν»

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

α) (i) $M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = 30240$

Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ είναι 30240

β)

i. Ρ_ _ _ _ _ _ _Γ

$$N(A) = M_7^{\varepsilon} = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{420}{30240} = \frac{1}{72}$$

ii. (Ι Α Α Α) _ _ _ _ _

$$N(B) = M_6^{\varepsilon}\cdot M_4^{\varepsilon} = \frac{6!}{2!}\cdot\frac{4!}{3!} = 1440$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1440}{30240} = \frac{1}{21}$$

iii. Ι_ _ _ _ _ _ _ _ $M_8^{\varepsilon} = \frac{8!}{3!\cdot 2!} = 3360$

Α_ _ _ _ _ _ _ _ $M_8^{\varepsilon} = \frac{8!}{2!\cdot 2!} = 10080$

$$N(\Gamma) = 3360 + 10080 = 13440$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{13440}{30240} = \frac{4}{9}$$

3.) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών τετραψήφιων αριθμών που μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 4, 7 και 8, **αν επιτρέπεται η επανάληψη** ψηφίου.

β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς:

i. Αρχίζουν και τελειώνουν με το ψηφίο 7.

ii. Είναι άρτιοι.

iii. Έχουν το γινόμενο των ψηφίων τους ίσο με 0.

ΛΥΣΗ

α.

Φ	Χ	Ε	Δ	Μ
Τ	3	4	4	4

$\Rightarrow 3\cdot 4\cdot 4\cdot 4=192$ αριθμοί

β. i. ο αριθμός αρχίζει και τελειώνει με 7

Φ	Χ	Ε	Δ	Μ
Τ	1	4	4	1

$\Rightarrow 1\cdot 4\cdot 4\cdot 1=16$ αριθμοί

ii. ο αριθμός είναι άρτιος

Φ	Χ	Ε	Δ	Μ
Τ	3	4	4	3

$3\cdot 4\cdot 4\cdot 3=144$ αριθμοί

iii. το γινόμενο των ψηφίων του αριθμού ισούται με 0

Αριθμοί που δεν περιέχουν το ψηφίο 0:

Φ	Χ	Ε	Δ	Μ
Τ	3	3	3	3

$\Rightarrow 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$ αριθμοί

Οι αριθμοί που περιέχουν ένα τουλάχιστον 0 και το γινόμενο των ψηφίων τους ισούται με 0 είναι **192-81=111**

Β τρόπος

ο αριθμός περιέχει ένα μηδενικό:

3	1	3	3

x 3=81 αριθμοί

ο αριθμός περιέχει δύο μηδενικά:

3	1	1	3

x3=27 αριθμοί

ο αριθμός περιέχει τρία μηδενικά:

3	1	1	1

=3 αριθμοί

Συνολικά: 81+27+3=111 αριθμοί

4. Κάποιος κληρονόμησε €250000 και επένδυσε αυτά τα χρήματα ως εξής:

i. Τόκισε με απλό τόκο τα $\frac{2}{5}$ των χρημάτων προς 1,75% για 5 χρόνια.

ii. Με τα $\frac{3}{10}$ των υπολοίπων χρημάτων, αγόρασε ένα σκάφος.

iii. Με τα χρήματά που του έμειναν αγόρασε ένα διαμέρισμα.

Στα 5 χρόνια απέσυρε τα χρήματα που κατάθεσε στην τράπεζα μαζί με τους τόκους τους και πώλησε το σκάφος προς €39000 και το διαμέρισμα με κέρδος 15%.

Να υπολογίσετε:

α) Το συνολικό ποσόν που είσπραξε από τις τρεις επενδύσεις.

β) Το συνολικό ποσοστό (%) κέρδους από τις τρεις επενδύσεις.

(α)

$$K_1 = 250000 \cdot \frac{2}{5} = €100000$$

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100} = \frac{100000 \cdot 1{,}75 \cdot 5}{100} = €8750$$

K+T=100000+8750=€108750

$$250000 - 100000 = €150000$$

$$K_2 = 150000 \cdot \frac{3}{10} = €45000 \text{ τιμή σκάφους}$$

$$K_3 = 150000 - 45000 = €105000 \text{ τιμή διαμερίσματος}$$

Τιμή πώληση διαμερίσματος: $105000 \cdot \frac{115}{100} = €120750$

Μετά από 5 χρόνια είσπραξε από τις τρεις επενδύσεις :

108750 + 39000 + 120750 = €268500

β) Συνολικό κέρδος 268500 – 250000 = €18500

Το συνολικό ποσοστό (%) κέρδους από τις τρεις επενδύσεις

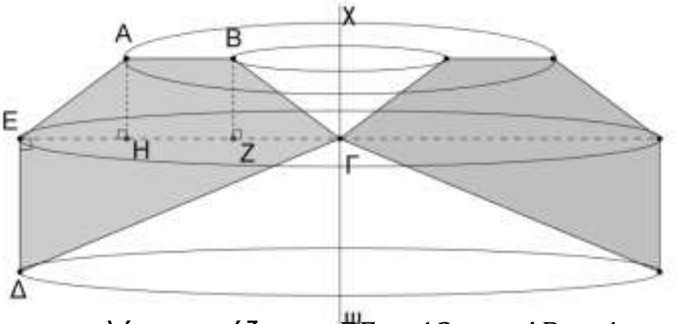
$$\frac{18500}{250000} \cdot 100\% = 7{,}4\%$$

5.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται πολύγωνο ΑΒΓΔΕ. Το ΑΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο με ΒΓ=ΑΕ=5cm και ΑΒ=4cm. Το ΓΔΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο $(\hat{E} = 90^\circ)$ με ΓΕ=12cm και ΔΕ=5cm. Το σκιασμένο πολύγωνο ΑΒΓΔΕ περιστρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα χψ, που είναι παράλληλος προς την ΔΕ
Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού.

β) Τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



$AB\Gamma E$ ισοσκελές τραπέζιο, $E\Gamma = 12cm,\ AB = 4cm$

$\Rightarrow EH = HZ = Z\Gamma = 4cm$

$AH = \sqrt{(AE)^2 - (EH)^2} = \sqrt{25 - 16} = 3cm$

$\Delta\Gamma = \sqrt{(\Delta E)^2 + (E\Gamma)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13cm$

Κόλουρος κώνος: $R = 12$, $\rho = 8$, $\upsilon = 3$, $\lambda = 5$

Κύλινδρος: $R = 12cm,\ \upsilon_1 = 5cm$

Κώνος 1 : $R = 12cm,\ \upsilon_1 = 5cm,\ \lambda_1 = 13cm$

Κώνος 2 : $r = 4$, $\upsilon = 3$, $\lambda = 5$

$$E_{o\lambda} = E_{\kappa.\kappa\omega\nu 1} + E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda.} + E_{\kappa.\kappa o\lambda.} + E_{\delta\alpha\kappa\tau.} + E_{\kappa.\kappa\omega\nu 2}$$

$$= \pi R\lambda_1 + 2\pi R\upsilon_1 + \pi(R+\rho)\lambda + \pi\rho^2 - \pi r^2 + \pi r\lambda$$

$$=156\pi + 120\pi + 100\pi + 64\pi - 16\pi + 20\pi = 444\pi cm^2$$

$$V = V_{\kappa o\lambda.\kappa.} + V_{\kappa\upsilon\lambda.} - V_{\kappa\omega\nu.1} - V_{\kappa\omega\nu.2}$$

$$= \frac{\pi\upsilon(R^2 + R\cdot\rho + \rho^2)}{3} + \pi R^2 \cdot \upsilon_1 - \frac{\pi R^2 \cdot \upsilon_1}{3} - \frac{\pi r^2 \cdot \upsilon}{3}$$

$$= 304\pi + 720\pi - 240\pi - 16\pi = 768\pi cm^3$$