**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 19/05/2017**
**8:00 – 11:00**

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**
**Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δύο (2) σελίδες.**
**Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.**

**<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>** **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

**1.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x^2-1}$$

**2.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int\left(e^{3x}+\sqrt[3]{x}-7\right)\mathrm{d}x$$

**3.** Δίνεται ο $2\times 2$ πίνακας:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

**(α)** Να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα του $A$.

**(β)** Να δείξετε ότι $A^{-1}-A=4I$, όπου $I$ ο $2\times 2$ μοναδιαίος πίνακας.

**4.** Αν $A$ και $B$ είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης με

$$P(A)=\frac{3}{10},\ P(A\cap B')=\frac{1}{5} \text{ και } P(A\cup B)=\frac{4}{5},$$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

**(α)** $P(A\cap B)$

**(β)** $P(A/B)$

**5.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{ax} + (a-2)x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου $a$ θετικός πραγματικός αριθμός.

**(α)** Να βρείτε την τιμή του $a$, για την οποία η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$.

**(β)** Να προσδιορίσετε το είδος του ακρότατου και να το υπολογίσετε.

**6.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\lambda x - 8\lambda y = 0$, όπου $\lambda$ μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

**(α)** Να δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda$, $\lambda \neq 0$. Ακολούθως, συναρτήσει του $\lambda$, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου.

**(β)** Να δείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την πιο πάνω εξίσωση εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση $3x + 4y = 0$.

**7.** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \text{συν}x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και τον άξονα των τεταγμένων.

**8.** Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy = 4$. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $A\left(2\rho, \frac{2}{\rho}\right), \rho < 0$, τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $B$. Στο $B$ φέρουμε κάθετη στον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει την υπερβολή στο σημείο $\Gamma\left(2t, \frac{2}{t}\right)$. Να δείξετε ότι:

**(α)** $\rho = 2t$

**(β)** το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό

**9.** Το Κέντρο Εξυπηρέτησης του Πολίτη θέλει να αλλάξει τον τηλεφωνικό αριθμό επικοινωνίας του με το κοινό. Χρειάζεται έναν οκταψήφιο αριθμό, ο οποίος να σχηματίζεται το πολύ από δύο διαφορετικά ψηφία. Αν ο αριθμός αρχίζει με 77, πόσοι τέτοιοι διαφορετικοί αριθμοί υπάρχουν;

**10.** Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \ln(1 + \text{συν}x) - \ln 2, \quad \forall x \in [0, \pi)$$

**(α)** Να δείξετε ότι η παράγωγος $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi)$ και να μελετήσετε την $f$ ως προς την μονοτονία.

**(β)** Να δείξετε ότι:

$$x^2 + \ln(1 + \text{συν}x)^4 < \ln 16, \quad \forall x \in (0, \pi)$$

**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄**
**ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**1.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

**2.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 9y$ και το σημείο $A(3,-3)$. Από το $A$ φέρουμε τις εφαπτομένες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$ προς την παραβολή.

**(α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$.

**(β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις ευθείες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$.

**3.** Δύο ομάδες, οι $A$ και $B$, συμμετέχουν στη σειρά των τελικών του πρωταθλήματος πετοσφαίρισης. Νικήτρια της σειράς των τελικών είναι η ομάδα που θα πετύχει πρώτη $4$ νίκες. Η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα $A$ έναν οποιονδήποτε αγώνα της σειράς των τελικών είναι $\frac{2}{3}$.

**(α)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου στη σειρά των τελικών να διεξαχθούν $6$ αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα.

**(β)** Δεδομένου ότι έχουν διεξαχθεί $6$ αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα, να υπολογίσετε την πιθανότητα η ομάδα αυτή να είναι η $A$.

(*Σημείωση: Σε έναν αγώνα πετοσφαίρισης δεν υπάρχει το αποτέλεσμα της ισοπαλίας, δηλαδή υπάρχει πάντα νικητής.*)

**4.** Δίνεται το σημείο $E(4,0)$ και η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): x = \frac{25}{4}$.

**(α)** Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων $T(x,y)$ του επιπέδου με την ιδιότητα

$$\frac{(TE)}{(TN)} = \frac{4}{5},$$

όπου $TN$ είναι η απόσταση του σημείου $T$ από την ευθεία $(\varepsilon)$, ανήκει στην έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

**(β)** Έστω $T(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$ ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης και $\Lambda\left(\frac{8}{5},0\right)$ ένα σταθερό σημείο. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\theta,\ \theta \in [0,2\pi)$, για τις οποίες η απόσταση $T\Lambda$ γίνεται ελάχιστη.

**5.** **(α)** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f$, ορισμένη στο διάστημα $[0,\pi]$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x=\pi-u$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} x f(\text{ημ}x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\text{ημ}x)\mathrm{d}x$$

**(β)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\,\text{ημ}x}{8+\text{ημ}^2 x}\mathrm{d}x$$

**------ Τ Ε Λ Ο Σ  Ε Ξ Ε Τ Α Σ Η Σ ------**