<u>ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)</u>

ΔΟΜΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΚΑΙ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ

Διάρκεια εξέτασης: **Τρεις (3) ώρες**

Δομή εξεταστικού δοκιμίου και επιμέρους βαθμολογία:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α΄ και το ΜΕΡΟΣ Β΄.

Το ΜΕΡΟΣ Α΄ περιλαμβάνει 10 θέματα και το ΜΕΡΟΣ Β΄ 5 θέματα.

Κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Α΄ βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Β΄ βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Οι υποψήφιοι πρέπει να λύσουν και τα 15 θέματα.

Σημειώσεις: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Θα χορηγείται τυπολόγιο Μαθηματικών.

Γενικές παρατηρήσεις:

1. Επειδή η φύση του μαθήματος είναι τέτοια ώστε κάθε νέα γνώση να στηρίζεται σε προηγούμενη γνωστή ύλη, τονίζεται ότι οι υποψήφιοι οφείλουν να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες, ιδιότητες και βασικά θεωρήματα των ενοτήτων που διδάχθηκαν στις προηγούμενες τάξεις, αλλά δεν συμπεριλαμβάνονται στην εξεταστέα ύλη, γιατί πολύ πιθανόν η λύση κάποιων ασκήσεων να απαιτεί και γνώσεις από τις ενότητες αυτές.
2. Όπου αναφέρεται διατύπωση ορισμών και θεωρημάτων, αυτά θα διατυπώνονται όπως είναι στα σχολικά εγχειρίδια έκδοσης 2019.

I. Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού

1. Εφαρμογή των παραγώγων στην εύρεση της εξίσωσης εφαπτομένης και της κάθετης μιας καμπύλης σε σημείο της.
2. Θεωρήματα (κανόνες) *De L'Hospital*. Διατύπωση και υπολογισμός ορίων που παρουσιάζουν απροσδιοριστία των μορφών $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.
3. Θεώρημα *Rolle*. Διατύπωση, γεωμετρική ερμηνεία και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

4. Θεώρημα Μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Διατύπωση, γεωμετρική σημασία και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
5. Ορισμοί (Μονοτονία Συνάρτησης): Γνησίως Αύξουσα, Αύξουσα, Γνησίως Φθίνουσα, Φθίνουσα, Σταθερή, Γνησίως Μονότονη και Μονότονη συνάρτηση. Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.
6. Ορισμοί (Ακρότατα Συνάρτησης): Τοπικά μέγιστη τιμή συνάρτησης, Τοπικά ελάχιστη τιμή συνάρτησης, Ολικά μέγιστη τιμή και Ολικά ελάχιστη τιμή συνάρτησης. Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.
7. Θεωρήματα μονοτονίας συνάρτησης (Κριτήρια Μονοτονίας). Γνησίως αύξουσα, Αύξουσα, Γνησίως φθίνουσα, Φθίνουσα, Σταθερή συνάρτηση. Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.
8. Θεώρημα του Fermat. Διατύπωση, απόδειξη, γεωμετρική ερμηνεία και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
9. Θεώρημα (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα). Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
10. Θεώρημα (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα). Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
11. Ορισμός κυρτής – κοίλης συνάρτησης. Γεωμετρική ερμηνεία.
12. Θεώρημα (Κριτήριο για την κυρτότητα συνάρτησης με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου). Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
13. Ορισμός σημείου καμπής και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
14. Θεώρημα (Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για την εύρεση των σημείων καμπής συνάρτησης). Εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
15. Ορισμός της Κατακόρυφης, Οριζόντιας και της Πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$. Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.
16. Θεώρημα της Πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$. Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
17. Μελέτη και κατασκευή γραφικής παράστασης συναρτήσεων.
18. Εφαρμογή των θεωρημάτων για τη μονοτονία και τα ακρότατα συνάρτησης στην επίλυση προβλημάτων με μέγιστα και ελάχιστα.

II. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1. **1.** Ορισμός των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων $y = τοξημx$, $y = τοξσυνx$, $y = τοξεφx$, $y = τοξσφx$ (με αναφορά στο πεδίο ορισμού και στο σύνολο τιμών τους). Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.
2. **2.** Κατασκευή της γραφικής παράστασης των πιο πάνω αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
3. **3.** Παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Απόδειξη και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

III. Αόριστο ολοκλήρωμα

1. Ανάλυση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Εύρεση Διαφορικού συνάρτησης.

3. Έννοια της αντιπαραγώγου μιας συνάρτησης και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

4. Ορισμός του αόριστου ολοκληρώματος. Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

5. Εύρεση βασικών αόριστων ολοκληρωμάτων συνεχών συναρτήσεων των μορφών:

$$\int x^{\nu}\,dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + C,\ \ \nu \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int e^{x}\ dx = e^{x} + C$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \qquad \int συνx\,dx = ημx + C \qquad \int ημx\,dx = -συνx + C$$

$$\int τεμ^{2}x\ dx = εφx + C \qquad \int στεμ^{2}x\ dx = -σφx + C \qquad \int τεμx\ εφx\,dx = τεμx + C$$

$$\int στεμx\ σφx\,dx = -στεμx + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = τοξημ\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a}\ τοξεφ\frac{x}{a} + C$$

6. Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

α) $\int df(x) = f(x) + C$

β) $\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx,\quad α$ σταθερά

γ) $\int[f(x) \pm g(x)]\,dx\ = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

7. Υπολογισμός της σταθεράς ολοκλήρωσης σε προβλήματα αρχικών τιμών και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

8. α) Εύρεση ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια κατάλληλης αντικατάστασης και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

β) Εύρεση ολοκληρωμάτων των πιο κάτω μορφών με τη βοήθεια κατάλληλης αντικατάστασης που θα δίδεται και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος:

i. $\int f\left(x, \sqrt{a^2-\beta^2 x^2}\right) dx$

ii. $\int f\left(x, \sqrt{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right) dx$

iii. $\int f\left(x, \frac{1}{\sqrt{\beta^2 x^2+\alpha^2}}\right) dx$

iv. $\int f\left(x, \sqrt{\beta^2 x^2-\alpha^2}\right) dx$

γ) Εύρεση ολοκληρωμάτων ρητών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $y = f(\eta\mu x\,, \sigma\upsilon\nu x)$ με κατάλληλη αντικατάσταση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

9. Εύρεση ολοκληρωμάτων με τυποποίηση βασικών μορφών ολοκληρωμάτων και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος:

α) Αν $\int f(x)\, dx = F(x) + C \;\Rightarrow\; \int f(ax+\beta)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+\beta) + C$

β) $\int f^{\nu}(x)\, f'(x)\, dx = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + C,\;\; \nu \neq -1$

γ) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

δ) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

10. Εύρεση ολοκληρωμάτων με χρήση της μεθόδου ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

11. Εύρεση ολοκληρωμάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων με χρήση τριγωνομετρικών μετασχηματισμών και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

12. Εύρεση ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων της μορφής: $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ όπου $f(x)$ και $g(x)$ ακέραια πολυώνυμα, με ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

13. Εύρεση αναγωγικού τύπου ολοκληρωμάτων και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

IV. Ορισμένο ολοκλήρωμα και εφαρμογές του

1. Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος.
2. Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού:

   «*Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ. Τότε, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ.*

   Δηλαδή, ισχύει $\dfrac{d}{dx}\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$ »

   Εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.
3. Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

   «Έστω f συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε :

   $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha) \text{ »}$$

   Απόδειξη και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
4. Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος με αντικατάσταση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

5. Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος:

α) $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\ dx = 0$

β) $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$

δ) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) \pm \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \pm \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

στ) Αν $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

ζ) Αν $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Διατύπωση και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων.

6. Υπολογισμός εμβαδού χωρίου που περικλείεται από μια καμπύλη, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ ή του άξονα των τεταγμένων και τις ευθείες $y = \alpha$ και $y = \beta$ και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

7. Υπολογισμός εμβαδού χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων: $y = f_1(x)$ και $y = f_2(x)$ και των ευθειών $x = \alpha$ και $x = \beta$ ή των καμπύλων $x = f_1(y)$ και $x = f_2(y)$ και των ευθειών $y = \alpha$ και $y = \beta$ και εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.

8. Υπολογισμός του όγκου στερεού που παράγεται από τη πλήρη περιστροφή επιπέδου χωρίου γύρω από την ευθεία $x = a$ ή $y = \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

9. Υπολογισμός αναγωγικών τύπων ορισμένου ολοκληρώματος και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

V. Συνδυαστική

1. Αρχή αθροίσματος. Διατύπωση και εφαρμογή της στην επίλυση προβλήματος.

2. Θεμελιώδης αρχή της απαρίθμησης (πολλαπλασιαστική αρχή). Διατύπωση και εφαρμογή της στην επίλυση προβλήματος.

3. Ορισμός του παραγοντικού ενός φυσικού αριθμού ν $(\nu!)$. Διατύπωση και εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

4. Υπολογισμός και εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων των:

- Μεταθέσεων ν διαφορετικών αντικειμένων (M_{ν})
- Επαναληπτικών μεταθέσεων ν αντικειμένων (M_{ν}^{ε})
- Κυκλικών μεταθέσεων ν διαφορετικών αντικειμένων (K_{ν})

- Διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ, (Δ_κ^ν)
- Επαναληπτικών διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ, (δ_κ^ν)
- Συνδυασμών ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ, $\binom{\nu}{\kappa}$

5. Ιδιότητα των συνδυασμών: $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$

Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

VI. Αναλυτική Γεωμετρία

Α. Παραβολή

1. Ορισμός της παραβολής ως γεωμετρικού τόπου. Διατύπωση και απόδειξη της αναλυτικής εξίσωσης της παραβολής και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

2. Αναλυτική εξίσωση της παραβολής $y^2 = 4ax$ ως γεωμετρικού τόπου με διευθετούσα $x + a = 0$ και εστία $E(\alpha, 0)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

3. Αναλυτική εξίσωση της παραβολής $x^2 = 4ay$ ως γεωμετρικού τόπου με διευθετούσα $y + a = 0$ και εστία $E(0, a)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

4. Κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των παραβολών $y^2 = 4\alpha x$ και $x^2 = 4\alpha y$, εύρεση των στοιχείων τους και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

5. Θέση σημείου ως προς παραβολή. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

6. Θέση ευθείας ως προς παραβολή. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

7. Παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής. Εύρεση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

8. Εύρεση της/των εξίσωσης/σεων της/των εφαπτομένων και καθέτων παραβολής και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

9. Εύρεση της αναλυτικής εξίσωσης γεωμετρικού τόπου σε προβλήματα.

Β. Έλλειψη

1. Ορισμός της Έλλειψης ως γεωμετρικού τόπου. Διατύπωση, απόδειξη της αναλυτικής εξίσωσης της Έλλειψης και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

2. Αναλυτική εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $(\alpha > \beta)$ ως γεωμετρικού τόπου με εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ και άθροισμα αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες E και E' ίσο με 2α . Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

3. Αναλυτική εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $(\alpha<\beta)$ ως γεωμετρικού τόπου με εστίες $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ και άθροισμα αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες E και E' ίσο με 2β. Διατύπωση, απόδειξη και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
4. Κατασκευή της γραφικής παράστασης και στοιχεία της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όταν $\alpha>\beta$ ή $\alpha<\beta$ και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
5. Αποστάσεις τυχαίου σημείου $T(x_1,y_1)$ της έλλειψης από τις εστίες της E και E'. Εύρεση, απόδειξη και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
6. Ιδιότητα του λόγου των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta$, από την εστία E και την ευθεία $x-\frac{\alpha}{\epsilon}=0$ (διευθετούσα) ή από την εστία E' και την ευθεία $x+\frac{\alpha}{\epsilon}=0$. Διατύπωση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
7. Ιδιότητα του λόγου των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha<\beta$, από την εστία E και την ευθεία $y-\frac{\beta}{\epsilon}=0$ (διευθετούσα) ή από την εστία E' και την ευθεία $y+\frac{\beta}{\epsilon}=0$. Διατύπωση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
8. Θέση σημείου ως προς έλλειψη. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
9. Θέση ευθείας ως προς έλλειψη. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
10. Παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης. ($x=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta,\ y=\beta\eta\mu\theta$ όπου $0\le\theta<2\pi$). Εύρεση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
11. Εύρεση της/των εξίσωσης/σεων της/των εφαπτομένων και καθέτων Έλλειψης και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
12. Εύρεση της αναλυτικής εξίσωσης γεωμετρικού τόπου σε προβλήματα.

Σημείωση: Βοηθήματα για τους υποψηφίους θα μπορούσαν να είναι και τα πιο κάτω:

1. **Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης, Α' Τεύχος**, ΥΑΠ 2019
2. **Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης, Β' Τεύχος**, ΥΑΠ 2019
3. **Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης, Γ' Τεύχος**, ΥΑΠ 2019
4. **Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης, Δ' Τεύχος**, ΥΑΠ 2019