

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ (48)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή 01/06/2018
8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	<p>Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = 3x^3 - 7x + 5$</p> <p>Λύση:</p> $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 7$
2.	<p>Οι ψηλότερες ημερήσιες θερμοκρασίες, σε βαθμούς Κελσίου, που καταγράφηκαν τις δέκα (10) τελευταίες μέρες του Μαΐου στη Λευκωσία ήταν:</p> <p style="text-align: center;">31, 35, 38, 39, 40, 39, 37, 32, 30, 29</p> <p>Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των θερμοκρασιών αυτών.</p> <p>Λύση:</p> $\bar{x} = \frac{31+35+38+39+40+39+37+32+30+29}{10} = \frac{350}{10} = 35$ <p>Η Μέση τιμή είναι 35 βαθμοί</p>
3.	<p>Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (4x^4 + x^2 - 3x + 7) dx$</p> <p>Λύση:</p> $\int (4x^4 + x^2 - 3x + 7) dx = \frac{4x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x + c$
4.	<p>Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-3, 4)$ και ακτίνα $R = 6$.</p> <p>Λύση: Κύκλος με κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R έχει εξίσωση</p> $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

5.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x}{5x - 2x^2}$

Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (5x - 2x^2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Απροσδιόριστη Μορφή } \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\text{De L'Hospital } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4x}{5x - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 4}{5 - 4x} = -\frac{4}{5}$$

6.

Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

(α) Να βρείτε το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα πιο πάνω ψηφία, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.

(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι μεγαλύτεροι από 4000.

Λύση:

(α)

X	E	Δ	M
6	6	5	4

$$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

(β)

X	E	Δ	M
3	6	5	4

$$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$$

7.

Να βρείτε τα σημεία καμπής της καμπύλης με εξίσωση $y = x^4 - 2x^3 + x - 1$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12x \\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 12x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ και } x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y''	+	○	-	+
y	∪	ΣΚ	∩	∪

Σημεία Καμπής (0,-1) και (1,-1)

8.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης

$$\text{με } P(A) = \frac{2}{9}, P(B') = \frac{3}{8} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{9}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A')$

(β) $P(A \cup B)$

(γ) $P(B/A)$

Λύση:

(α) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

(β) $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{5}{8} - \frac{1}{9} = \frac{53}{72}$$

(γ) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}$

<p>9.</p>	<p>Από ένα τμήμα 12 μαθητών πρόκειται να επιλεγεί μια πενταμελής ομάδα για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε ένα Συνέδριο.</p> <p>(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί η πενταμελής ομάδα χωρίς κανένα περιορισμό.</p> <p>(β) Να βρείτε σε πόσες από τις πιο πάνω ομάδες δύο συγκεκριμένα άτομα δεν είναι μαζί.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $\binom{12}{5} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$</p> <p>(β) $\binom{12}{5} - \binom{10}{3} = \frac{12!}{7!5!} - \frac{10!}{3!7!} = 792 - 120 = 672$</p>
<p>10.</p>	<p>Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y^2 - 2x^2 = 2$</p> <p>(α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$</p> <p>(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $x = 1$ και $y > 0$.</p> <p>Λύση:</p> <p>(α) $2y \frac{dy}{dx} - 4x = 0 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 4x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$</p> <p>(β) $y^2 - 2x^2 = 2$ Για $x=1 \Rightarrow y^2 - 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$ ($y > 0$) $\Rightarrow y = 2$ $A(1,2)$</p> $\lambda_{\text{εφ}} = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ <p>Εξίσωση Εφαπτομένης στο $A(1,2)$</p> $y - y_1 = \lambda_{\text{εφ}}(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = x - 1 \Rightarrow y = x + 1$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των σχεδίων που έχουν παραδώσει οι 22 μαθητές ενός τμήματος Γραφικών Τεχνών, τη φετινή σχολική χρονιά.

Αριθμός σχεδίων (x_i)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός μαθητών (f_i)	2	7	6	4	2	1

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων.
(β) Τη διάμεσο των παρατηρήσεων.
(γ) Τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.
(δ) Την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Λύση:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
0	2	0	4	8
1	7	7	1	7
2	6	12	0	0
3	4	12	1	4
4	2	8	4	8
5	1	5	9	9
	22	44		36

(α) $x_\epsilon = 1$

(β) $x_\delta = \frac{2+2}{2} = 2$

(γ) $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{44}{22} = 2$

(δ) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{36}{22}} = \sqrt{\frac{18}{11}} = \sqrt{1,636} \approx 1,279$

2.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση με τύπο } f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τις ασύμπτωτες, τα διαστήματα μονotonίας, τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης και στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

(α) Πεδίο ορισμού: $A = \mathbf{R}$ ($x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$)

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

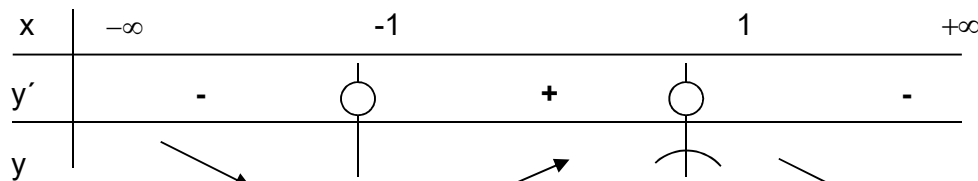
$$\text{Αν } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Άρα τέμνει τους άξονες στο σημείο $(0,0)$

(γ) Μονotonία και τοπικά ακρότατα:

$$y' = \frac{4 \cdot (x^2 + 1) - 4x \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$$



$$x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (-1, -2) \text{ min} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1, 2) \text{ max}$$

Φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$

Αύξουσα στο διάστημα $[-1, +1]$

(δ) Ασύμπτωτες

Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

} \Rightarrow Απροσιδιόριστη Μορφή $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Εφαρμόζω De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x)'}{(x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2 + 1}$$

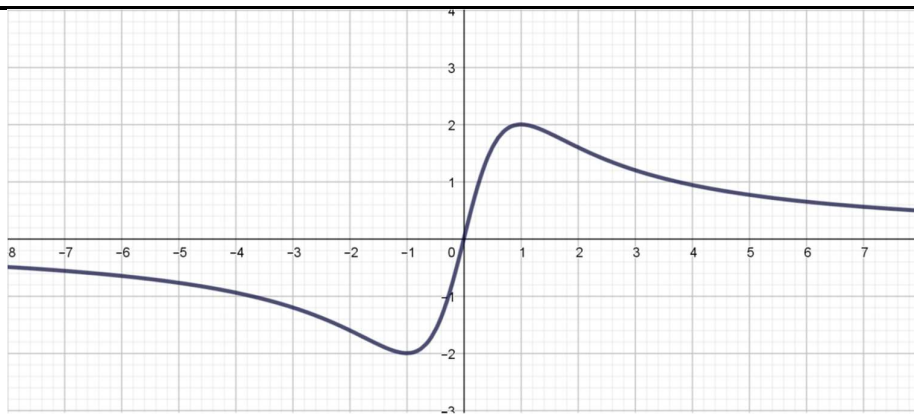
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

} \Rightarrow Απροσιδιόριστη Μορφή $\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$

Εφαρμόζω De L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x)'}{(x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ Οριζόντια Ασύμπτωτη}$$



3 Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x \cdot \sin x$

Να δείξετε ότι:

$$(α) \frac{dy}{dx} = 2(\sin x - x \cdot \eta\mu x)$$

$$(β) \frac{d^2y}{dx^2} + y = -4\eta\mu x$$

Λύση:

$$y = 2x \cdot \sin x$$

$$\begin{aligned} (α) \frac{dy}{dx} &= (2x)' \sin x + 2x(\sin x)' \\ &= 2\sin x + 2x(-\eta\mu x) \\ &= 2(\sin x - x\eta\mu x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (β) \frac{d^2y}{dx^2} &= 2[(-\eta\mu x) - (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)] \\ &= -2\eta\mu x - 2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x \\ &= -4\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = -4\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2x\sigma\upsilon\nu x = -4\eta\mu x$$

4

Δίνεται η λέξη **ΜΑΚΕΔΟΝΙΑ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(β) Επιλέγεται τυχαία ένας από τους αναγραμματισμούς της πιο πάνω λέξης.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: «Ο αναγραμματισμός να αρχίζει από **A** και να τελειώνει σε **A**».

Δ: «Ο αναγραμματισμός να έχει όλα τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις».

Λύση:

$$(α) M_9^e = \frac{9!}{2!} = \frac{362880}{2} = 181440$$

(β) A _ _ _ _ _ A

$$N(\Gamma) = M_7 = 7! = 5040$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5040}{181440} = \frac{1}{36}$$

MKΔN _ _ _ _

$$N(\Delta) = M_4 \cdot M_6^e = 4! \cdot \frac{6!}{2!} = 24 \cdot 360 = 8640$$

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{8640}{181440} = \frac{1}{21}$$

5

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = x + 1$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$

Λύση:

$$u = x + 1 \Rightarrow x = u - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$\Rightarrow du = dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int_1^2 \frac{(u-1)}{u^3} du$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{u}{u^3} - \frac{1}{u^3} \right) dx$$

$$= \int_1^2 (u^{-2} - u^{-3}) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} \right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}$$