ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 21 ΜΑΪΟΥ 2018
8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int(3x^6-2x^3+8x+1)dx$.

Λύση:

$$\int(3x^6-2x^3+8x+1)dx=\frac{3x^7}{7}-\frac{2x^4}{4}+\frac{8x^2}{2}+x+c$$
$$=\frac{3x^7}{7}-\frac{x^4}{2}+4x^2+x+c$$

2) Οι ελάχιστες ημερήσιες θερμοκρασίες (σε βαθμούς κελσίου) που καταγράφηκαν στο Τρόοδος κατά το πρώτο δεκαήμερο του Ιανουαρίου 2018, ήταν:

$$12, 16, 17,\ 8,\ 6,\ 9,\ 12,\ 11,\ 11,\ 9$$

Να υπολογίσετε:

α) τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3

β) το εύρος (R) των παρατηρήσεων καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR).

Λύση: Κατατάσσουμε τις 10 παρατηρήσεις x_i , $όπου\ i=1,2,3,\ldots,10$ σε αύξουσα σειρά:

$$6,\ 8,\ 9,\ 9,\ 11,\ 11,\ 12,\ 12,\ 16,\ 17$$

Πλήθος: $\nu=10$, έτσι έχουμε:

$$\nu=10\Rightarrow\frac{\nu}{4}=2{,}5 \text{ άρα } Q_1=x_3=9$$

$$\frac{\nu}{2}=5\Rightarrow Q_2=\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{11+11}{2}=11$$

$$\frac{3\nu}{4}=7{,}5\Rightarrow Q_3=x_8=12$$

$$R=x_{max}-x_{min}=17-6=11$$

$$IQR=Q_3-Q_1=12-9=3$$

3) Σε ένα σχολείο φοιτούν στη Β΄ Λυκείου 205 μαθητές. Οι 80 μαθητές από αυτούς επέλεξαν το μάθημα της Φυσικής, οι 65 επέλεξαν το μάθημα της Βιολογίας και οι 34 επέλεξαν και τα δύο μαθήματα. Να βρείτε πόσοι μαθητές δεν επέλεξαν κανένα από τα δύο αυτά μαθήματα.

Λύση: Έστω Ω το σύνολο όλων των μαθητών της Β΄ Λυκείου του σχολείου.

Συμβολίζουμε με Φ το σύνολο των μαθητών που επέλεξαν το μάθημα της Φυσικής και με B το σύνολο των μαθητών που επέλεξαν το μάθημα της Βιολογίας.

$\nu(\Omega) = 205,\ \nu(\Phi) = 80,\ \nu(B) = 65,\ \nu(B \cap \Phi) = 34$

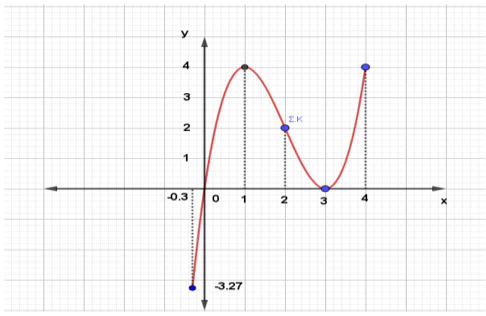
Το πλήθος των μαθητών που δεν επέλεξαν κανένα από τα δύο αυτά μαθήματα είναι:

$$\nu(B' \cap \Phi') = \nu(B \cup \Phi)' = \nu(\Omega) - \nu(B \cup \Phi) = 205 - [\nu(B) + \nu(\Phi) - \nu(B \cap \Phi)]$$

$$= 205 - (65 + 80 - 34)$$

$= 94$ μαθητές δεν επέλεξαν κανένα από τα δύο αυτά μαθήματα.

4) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας τριτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f\colon [-0{,}3,\ 4] \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = 2$.



Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

α) $f'(x) = 0$

β) $f''(x) = 0$

γ) $f'(x) < 0$

δ) $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$

Λύση:

α) $x = 1\,, x = 3$

β) $x = 2$

γ) $1 < x < 3$

δ) $3 < x \leq 4$

5) Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B του ιδίου δειγματικού χώρου Ω, με $\mathrm{P(A)} = \frac{3}{5}$, $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{1}{4}$ και $\mathrm{P(A/B)} = \frac{3}{4}$.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

i) $\mathrm{P(A - B)}$

ii) $\mathrm{P(A' \cup B')}$

iii) $\mathrm{P(B/A)}$

β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Λύση:

α) i) $\mathrm{P(A - B)} = P(A) - \mathrm{P(A \cap B)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$

ii) $\mathrm{P(A' \cup B')} = P[(A \cap B)'] = 1 - \mathrm{P(A \cap B)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

iii) $\mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{12}$

β) $\mathrm{P(A/B)} = \frac{3}{4} \Longrightarrow \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(B)} = \frac{3}{4} \Longrightarrow P(B) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \neq \mathrm{P(A \cap B)}$

Άρα τα ενδεχόμενα Α και Β <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητα.

Β΄ τρόπος: Τα ενδεχόμενα Α και Β <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητα διότι: $\mathrm{P(A/B)} \neq \mathrm{P(A)}$

6) Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $\mathrm{B} = \{\varepsilon, o, \eta\}$.

Να βρείτε το πλήθος των λέξεων με πέντε γράμματα (με νόημα ή χωρίς νόημα) που μπορούν να σχηματιστούν, αν επιλέξουμε τυχαία τρία γράμματα από το σύνολο A και δύο γράμματα από το σύνολο B.

Λύση:

$$\binom{4}{3}\binom{3}{2} M_5 = 4 \cdot 3 \cdot 5! = 1440 \text{ λέξεις}$$

7)	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 9x + 1$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -1$ και σημείο καμπής στο $x = 1$. Να βρείτε τις τιμές των α και β.
	Λύση: $$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 9, \quad f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$$ $$\begin{cases} \text{Τοπικό ακρότατο στο x} = -1 \Longrightarrow f'(-1) = 0 \\ \text{Σημείο καμπής στο x} = 1 \Longrightarrow f''(1) = 0 \end{cases}$$ $$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 9 \\ 6\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} 3\alpha + 6\alpha = 9 \\ -3\alpha = \beta \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{matrix}$$

8)	Τα στοιχεία του συνόλου Ω είναι όλοι οι εξαψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, χωρίς επανάληψη. α) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Ω. β) Αν πάρουμε τυχαία ένα αριθμό από το σύνολο Ω, να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός που επιλέγηκε να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Λύση:

α)

7	7	6	5	4	3

Το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 17640$

β) $\mathrm{A} = \{\text{Οι εξαψήφιοι που είναι πολλαπλάσια του } 5\}$

Το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που τελειώνουν σε μηδέν είναι

7	6	5	4	3	1

Μηδέν $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 2520$ αριθμοί.

Το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που τελειώνουν σε πέντε είναι

6	6	5	4	3	1

Πέντε $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 2160$ αριθμοί.

Σύνολο 4680 αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 5.

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{v(A)}}{\mathrm{v}(\Omega)} = \frac{4680}{17640} = \frac{13}{49}$$

9)	Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = 12x$. Να βρείτε τον τύπο της f για την οποία ισχύουν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 3$.
	Λύση: $f'(x) = \int 12x dx = 6x^2 + c_1$ $f'(1) = 0$ τότε $6 \cdot 1 + c_1 = 0$ τότε $\mathbf{c_1 = -6}$ $f'(x) = 6x^2 - 6$ $f(x) = \int (6x^2 - 6) dx = 2x^3 - 6x + c_2$ $f(2) = 3$ τότε $2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + c_2 = 3$ τότε $\mathbf{c_2 = -1}$ $f(x) = 2x^3 - 6x - 1$
10)	Το ύψος ενός κόλουρου κώνου είναι τετραπλάσιο της ακτίνας της μικρής βάσης του. Η ακτίνα της μεγάλης βάσης του είναι ίση με το ύψος του. Αν ο όγκος του είναι ίσος με $1792\pi \ \mathrm{m}^3$, να υπολογίσετε: α) το μήκος της ακτίνας της μικρής βάσης του, β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας ($\mathrm{E}_{ολ}$).
	Λύση: α) $\rho = x$ $\mathrm{R} = 4x$ $\upsilon = 4x$ $\mathrm{V}_{κ.κων} = \frac{\pi\upsilon}{3}(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R} \cdot \rho + \rho^2)$ $1792\pi = \frac{\pi \cdot 4\mathrm{x}}{3}(16x^2 + 4x \cdot x + x^2)$ $1792 = \frac{4x}{3} 21\mathrm{x}^2$ τότε $x^3 = 64$ τότε $x = 4$ Άρα $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{4m}$ β) $\mathbf{R = 16m}$, $\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{16m}$ Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος: $\lambda^2 = 16^2 + 12^2 = 400$ τότε $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{20m}$ $\mathrm{E}_{ολ} = \pi(\mathrm{R} + \rho)\lambda + \pi\mathrm{R}^2 + \pi\rho^2 = \pi(16 + 4)20 + 256\pi + 16\pi = 672\pi \mathrm{m}^2$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1) Σε έναν τηλεοπτικό διαγωνισμό ταλέντων συμμετείχαν εννέα (9) διαγωνιζόμενοι, οι οποίοι βαθμολογήθηκαν από το κοινό (με τηλεψηφοφορία) και από κριτική επιτροπή. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Διαγωνιζόμενος	Βαθμολογία κριτικής επιτροπής (Χ)	Βαθμολογία κοινού (Υ)
Δ1	9	8
Δ2	3	4
Δ3	1	2
Δ4	4	6
Δ5	5	4
Δ6	8	7
Δ7	6	6
Δ8	2	3
Δ9	7	5

α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης (r) των δύο μεταβλητών Χ (βαθμολογία κριτικής επιτροπής) και Υ (βαθμολογία κοινού).

β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών και να την ερμηνεύσετε.

Λύση:

α)

	X	Υ	$\mathrm{X}\cdot\Upsilon$	$(\mathrm{X}-\bar{\mathrm{X}})^2$	$(\Upsilon-\bar{\Upsilon})^2$
Δ1	9	8	72	16	9
Δ2	3	4	12	4	1
Δ3	1	2	2	16	9
Δ4	4	6	24	1	1
Δ5	5	4	20	0	1
Δ6	8	7	56	9	4
Δ7	6	6	36	1	1
Δ8	2	3	6	9	4
Δ9	7	5	35	4	0
	$\sum \mathrm{X}=45$	$\sum \Upsilon=45$	$\sum \mathrm{X}\Upsilon=263$	$\sum(\mathrm{X}-\bar{\mathrm{X}})^2=60$	$\sum(\Upsilon-\bar{\Upsilon})^2=30$

$$\bar{\mathrm{X}}=\frac{45}{9}=5 \qquad \bar{\Upsilon}=\frac{45}{9}=5 \qquad S_{\mathrm{X}}=\sqrt{\frac{60}{9}}=2{,}58 \qquad S_{\Upsilon}=\sqrt{\frac{30}{9}}=1{,}83$$

$$r=\frac{\sum \mathrm{X}\Upsilon-v\bar{\mathrm{X}}\bar{\Upsilon}}{vS_{\mathrm{X}}S_{\Upsilon}}=\frac{263-9\cdot5\cdot5}{9\cdot2{,}58\cdot1{,}83}=0{,}894$$

β) Υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση. Αυτό σημαίνει ότι όσο ψηλή ήταν η βαθμολογία από τους κριτές τόσο αντίστοιχα ψηλή ήταν και η βαθμολογία από το κοινό.

2) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης G_f της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής της, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.

Λύση:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Για $x = 0$: $f(0) = 0$, (0,0).

Για $y = 0$:

$2x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ $\delta\iota\pi\lambda$ή ή $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

Θέτω $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$f(0) = 0$, $\max(0,0)$ και $f(1) = -1$, $\min(1,-1)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow 12x = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

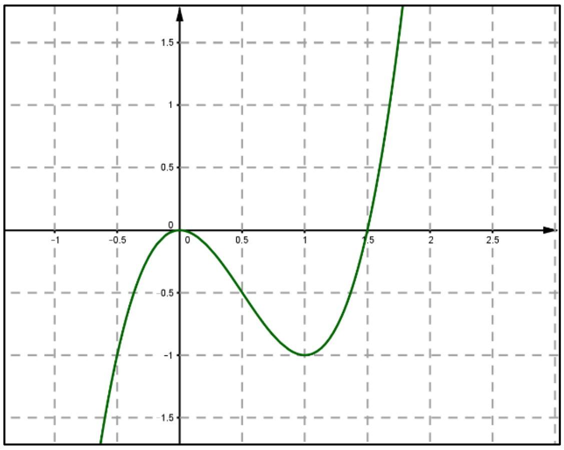
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$					

$\Sigma K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{2}]$ και κυρτή στο διάστημα $[\frac{1}{2}, +\infty)$

Συμπεριφορά στα άκρα του Π.Ο:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



3) Μια εργοληπτική εταιρεία κατασκευάζει εξοχικές κατοικίες. Το συνολικό κόστος (Κ) κατασκευής x εξοχικών κατοικιών, σε χιλιάδες ευρώ το χρόνο, δίνεται από τον τύπο $\mathrm{K}(x) = 50 + 3x,\ \ 0 \le x \le 95.$

Η τιμή πώλησης κάθε εξοχικής κατοικίας είναι $(20 - \frac{x}{10})$ χιλιάδες ευρώ.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους (P) από την πώληση x εξοχικών κατοικιών, σε χιλιάδες ευρώ το χρόνο, δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{P}(x) = 17x - \frac{x^2}{10} - 50, \quad 0 \le x \le 95.$$

β) Να βρείτε πόσες εξοχικές κατοικίες πρέπει να κατασκευάζει η εργοληπτική εταιρεία το χρόνο, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Λύση:

(α) $P(x) = x \cdot \left(20 - \frac{x}{10}\right) - K(x) = 20x - \frac{x^2}{10} - (50 + 3x) = 20x - \frac{x^2}{10} - 50 - 3x$
$= 17x - \frac{x^2}{10} - 50$

(β) $P'(x) = 17 - \frac{2x}{10} = 17 - \frac{x}{5}$

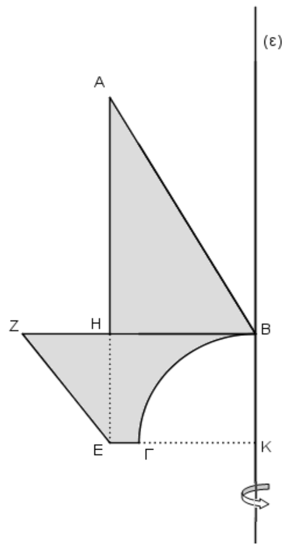
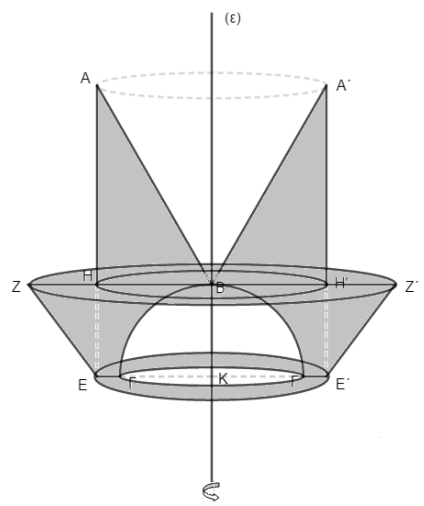
$P'(x) = 0 \Rightarrow 17 - \frac{x}{5} = 0 \Rightarrow 17 = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 85$

x	0		85		95
$P'(x)$		+	0	-	
$P(x)$		↗		↘	

$(P(0) = -50, \quad P(95) = 672{,}5\ \textit{χιλιάδες ευρώ})$

Άρα, η εταιρεία πρέπει να κατασκευάζει 85 κατοικίες για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

4)	Δίνεται η λέξη Σ Τ Ο Χ Α Σ Μ Ο Σ. α) i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. ii) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις. β) i) Αν πάρουμε στην τύχη έναν από τους αναγραμματισμούς της λέξης ΣΤΟΧΑΣΜΟΣ, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: Α ={Ο αναγραμματισμός περιέχει τη λέξη ΣΤΟΧΟΣ} ii) Αν ο αναγραμματισμός περιέχει την λέξη ΣΤΟΧΟΣ, να βρείτε την πιθανότητα η λέξη ΣΤΟΧΟΣ να μην είναι στο τέλος του αναγραμματισμού.
	Λύση: $\alpha)\ \text{i)}\ \text{M}_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = 30240$ Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης Σ Τ Ο Χ Α Σ Μ Ο Σ είναι 30240. $\boxed{\text{Ο Ο Α}}$ Σ Σ Σ Τ Χ Μ $\text{ii)}\ \frac{7!}{3!}\cdot\frac{3!}{2!} = 2520$ Το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις είναι 2520. $\beta)\ \text{i)} \text{P(A)} = \frac{4!}{30240} = \frac{1}{1260}$ $\text{ii)}\ \text{P(η λέξη ΣΤΟΧΟΣ να βρίσκεται στο τελος της λέξης)} = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$ $\text{P(η λέξη ΣΤΟΧΟΣ να μη βρίσκεται στο τελος της λέξης)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

5)	Στο πιο κάτω σχήμα το ZBKE είναι ορθογώνιο τραπέζιο με ZB και EK κάθετες στην ευθεία (ε) και $\mathrm{ZB} = 8\mathrm{cm}$. Το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην EK και το τόξο ΓΒ ανήκει στον κύκλο με κέντρο K και ακτίνα $\mathrm{KB} = 4\mathrm{cm}$. Το AHB είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{\mathrm{H}} = 90^0$, $\widehat{\mathrm{A}} = 30^0$ και $\mathrm{HB} = 5\mathrm{cm}$. Το σκιασμένο χωρίο $\mathrm{AB\Gamma EZHA}$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε: α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $(\mathrm{E}_{ο\lambda})$ και β) τον όγκο (V) του στερεού που παράγεται. 
	Λύση: 

Στοιχεία Στερεών

Κύλινδρος:	**Κώνος:**	**Κόλουρος κώνος:**	**Ημισφαίριο:**
$R = 5cm$ $\upsilon_1 = 5\sqrt{3}cm$	$r = 5cm$ $\upsilon_1 = 5\sqrt{3}cm$ $\lambda_1 = 10cm$	$R_1 = 8cm$ $\rho = 5cm$ $\upsilon_2 = 4cm$ $\lambda_2 = 5cm$	$R_2 = 4cm$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABH:

$\widehat{\mathrm{H}} = 90^0$, $\widehat{\mathrm{A}} = 30^0$ και $\mathrm{HB} = 5\mathrm{cm}$, τότε η υποτείνουσα $\mathrm{AB} = \lambda_1 = 10cm$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2 \Rightarrow \mathrm{AH}^2 = 10^2 - 5^2 = 75$ τότε το $\upsilon_1 = 5\sqrt{3}cm$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ZHE:

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$\mathrm{EZ}^2 = \mathrm{ZH}^2 + \mathrm{HE}^2 \Rightarrow \mathrm{EZ}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ τότε $\mathrm{EZ} = \lambda_2 = 5\mathrm{cm}$

Κύλινδρος

$\mathrm{V}_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi \mathrm{R}^2 \upsilon_1 = \pi 5^2 \cdot 5\sqrt{3} = 125\pi\sqrt{3}\mathrm{cm}^3$

$\mathrm{E}_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda} = 2\pi \mathrm{R} \upsilon_1 = 2\pi 5 \cdot 5\sqrt{3} = 50\pi\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

Κώνος

$$\mathrm{V}_{\kappa\omega\nu} = \frac{\pi r^2 \upsilon_1}{3} = \frac{\pi 5^2 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi\mathrm{cm}^3$$

$\mathrm{E}_{\kappa.\kappa\omega\nu} = \pi \mathrm{r} \lambda_1 = \pi 5 \cdot 10 = 50\pi\mathrm{cm}^2$

Κόλουρος Κώνος

$$V_{\kappa.\kappa\omega\nu} = \frac{\pi\upsilon_2}{3}({R_1}^2 + R_1 \cdot \rho + \rho^2) = \frac{\pi \cdot 4}{3}(8^2 + 8 \cdot 5 + 5^2) = 172\pi cm^3$$

$$E_{\kappa.\kappa.\kappa\omega\nu} = \pi(R_1 + \rho)\lambda_2 = \pi(8+5)5 = 65\pi cm^2$$

$$E_{\delta 1} = \pi({R_1}^2 - r^2) = \pi(8^2 - 5^2) = 39\pi cm^2$$

$$E_{\delta 2} = \pi(\rho^2 - {R_1}^2) = \pi(5^2 - 4^2) = 9\pi cm^2$$

Ημισφαίριο

$$V_{\eta\mu.\sigma\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi {R_2}^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{128}{3}\pi cm^3$$

$$E_{\eta\mu.\sigma\varphi} = \frac{1}{2}4\pi {R_2}^2 = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 32\pi cm^2$$

Στερεό

$$\mathbf{E_{o\lambda} = E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda} + E_{\kappa.\kappa\omega\nu} + E_{\delta 1} + E_{\kappa.\kappa.\kappa\omega\nu} + E_{\delta 2} + E_{\eta\mu.\sigma\varphi}}$$

$$E_{o\lambda} = 50\sqrt{3}\pi + 50\pi + 65\pi + 39\pi + 9\pi + 32\pi = \boldsymbol{\pi\left(50\sqrt{3} + 195\right)cm^2}$$

$$\mathbf{V_{o\lambda} = V_{\kappa\upsilon\lambda} - V_{\kappa\omega\nu} + V_{\kappa.\kappa\omega\nu} - V_{\eta\mu.\sigma\varphi}}$$

$$V_{o\lambda} = 125\pi\sqrt{3} - \frac{125\pi\sqrt{3}}{3} + 172\pi - \frac{128\pi}{3} = \boldsymbol{\left(\frac{250\sqrt{3} + 388}{3}\right)\pi cm^3}$$

ΤΕΛΟΣ