

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ Π.Κ. (50)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 22 Ιουνίου 2020

08:00 – 11:00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1. Να υπολογίσετε τον όγκο κύβου με ακμή $2m$.

Λύση:

$$V = a^3 \Rightarrow V = 2^3 \Rightarrow V = 8m^3$$

2. Ο Κυπριακός Οργανισμός Τουρισμού (Κ.Ο.Τ) ανακοίνωσε ότι φέτος αναμένεται μείωση κατά 60% της τουριστικής κίνησης προς τη χώρα μας, σε σχέση με την περσινή χρονιά, λόγω της πανδημίας. Πέρυσι μας επισκέφτηκαν 1500 000 τουρίστες. Να υπολογίσετε τον αριθμό των τουριστών που αναμένονται φέτος στη χώρα μας.

Λύση:

$$\frac{100}{1500000} \quad \frac{60}{x} \quad \text{ή} \quad \frac{60}{100} \cdot 1500000 = 900000$$

$$1500000 - 900000 = 600000$$

3. Ορθό τετραγωνικό πρίσμα έχει ύψος $4m$ και πλευρά βάσης μήκους $5m$. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

Λύση:

$$E_{\beta} = 5^2 = 25m^2$$

$$V = E_{\beta} \cdot v \Rightarrow V = 25 \cdot 4 = 100m^3$$

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου που έχει ακτίνα βάσης 3cm και ύψος 7cm (να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του π).

Λύση:

$$E_{\kappa} = 2\pi Rv = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi\text{cm}^2$$

5. Ένα επαγγελματικό μίξερ πωλήθηκε με έκπτωση 30% στην τιμή των €280. Να υπολογίσετε την τιμή του μίξερ πριν την έκπτωση.

Λύση:

A' τρόπος: $\frac{100}{70} \cdot 280 = 400$

ή

B' τρόπος:

Αρχική τιμή	Έκπτωση	Τιμή πώλησης
100	30	70
x		280

$$\frac{100}{x} = \frac{70}{280} \Rightarrow x = \frac{280 \cdot 100}{70} \Rightarrow x = €400$$

6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 8cm και ύψος 12cm . Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Λύση:

$$E_{\beta} = 8^2 = 64\text{cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}E_{\beta} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 12 = 256\text{cm}^3$$

7. Η στέγη μιας θεατρικής σκηνής έχει σχήμα κώνου με διάμετρο βάσης 24m και ύψος 5m . Η στέγη της σκηνής καλύπτεται από ειδικά κατασκευασμένο ύφασμα. Να υπολογίσετε πόσα τετραγωνικά μέτρα ύφασμα χρειάστηκαν για την κατασκευή της.

Λύση:

$$\delta = 24 \Rightarrow R = 12\text{m}$$

Πυθαγόρειο θεώρημα: $\lambda = 13\text{m}$

$$E_{\kappa} = \pi R\lambda \Rightarrow E_{\kappa} = \pi \cdot 12 \cdot 13 \Rightarrow E_{\kappa} = 156\pi \Rightarrow E_{\kappa} = 489.84\text{m}^2 \text{ ύφασμα}$$

8. Ένα εστιατόριο, τον μήνα Μάιο, πρόσφερε σε άπορες οικογένειες 1800 μερίδες φαγητού και τον Ιούνιο 2016 μερίδες.
Να υπολογίσετε το ποσοστό αύξησης στον αριθμό των μερίδων φαγητού που πρόσφερε το εστιατόριο τον Ιούνιο, σε σχέση με τον Μάιο.

Λύση:

$$2016 - 1800 = 216$$

$$\frac{216}{x} = \frac{1800}{100} \Rightarrow x = \frac{216 \cdot 100}{1800} \Rightarrow x = 12\%$$

$$\text{ή } \frac{216}{1800} \cdot 100\% = 12\%$$

9. Το μήκος της βάσης ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι τριπλάσιο από το πλάτος του και το ύψος του είναι 5cm . Αν ο όγκος του είναι 1500cm^3 , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

Λύση:

$$\alpha = 3x, \beta = x, \gamma = 5\text{cm}$$

$$V = 3x \cdot x \cdot 5 \Rightarrow 1500 = 15x^2 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

$$\alpha = 30\text{cm},$$

$$\beta = 10\text{cm}$$

$$E_{ολ} = 2 \cdot (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \Rightarrow$$

$$E_{ολ} = 2 \cdot (300 + 150 + 50) \Rightarrow E_{ολ} = 2 \cdot 500 \Rightarrow E_{ολ} = 1000\text{cm}^2$$

10. Το εμβαδόν της μικρής βάσης ενός κολουρου κώνου είναι $100\pi\text{cm}^2$.
Η ακτίνα της μεγάλης βάσης του είναι κατά 6cm μεγαλύτερη από την ακτίνα της μικρής βάσης του. Το ύψος του είναι ίσο με το μισό της ακτίνας της μεγάλης βάσης του.

Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του

(3 μονάδες)

β) τον όγκο του.

(2 μονάδες)

Λύση:

$$\alpha) E_{\beta} = \pi\rho^2 \Rightarrow 100\pi = \pi\rho^2 \Rightarrow \rho^2 = 100 \Rightarrow \rho = 10\text{cm}$$

$$R = \rho + 6 \Rightarrow R = 10 + 6 \Rightarrow R = 16\text{cm}$$

$$v = \frac{R}{2} = \frac{16}{2} = 8\text{cm}$$

$$\text{Πυθαγόρειο θεώρημα: } \lambda = 10\text{cm}$$

$$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda \Rightarrow E_{\kappa} = \pi(16 + 10) \cdot 10 \Rightarrow E_{\kappa} = 260\pi\text{cm}^2$$

$$\beta) V_{\text{κολ.κ}} = \frac{\pi \cdot v}{3} (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3} (16^2 + 16 \cdot 10 + 10^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3} (516) = 1376\pi \text{cm}^3$$

ΜΕΡΟΣ Β΄:

1. Μια οικογένεια έχει μηνιαίο εισόδημα €2800. Ένα μέρος του εισοδήματος διατίθεται για το ενοίκιο και το υπόλοιπο ξοδεύεται όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Διατροφή	30% του μηνιαίου εισοδήματος
Σπουδές	€350
Αποταμίευση	10% του μηνιαίου εισοδήματος
Διάφορα έξοδα	25% του μηνιαίου εισοδήματος

Να υπολογίσετε το ποσό του μηνιαίου εισοδήματος που διατίθεται για το ενοίκιο.

Λύση:

(α΄ τρόπος)

$$\frac{30}{100} \cdot 2800 = €840, \quad \frac{10}{100} \cdot 2800 = €280, \quad \frac{25}{100} \cdot 2800 = €700$$

$$\begin{aligned} \text{Ενοίκιο} &= 2800 - (840 + 280 + 700 + 350) = 2800 - 2170 \\ &= €630 \end{aligned}$$

(β΄ τρόπος)

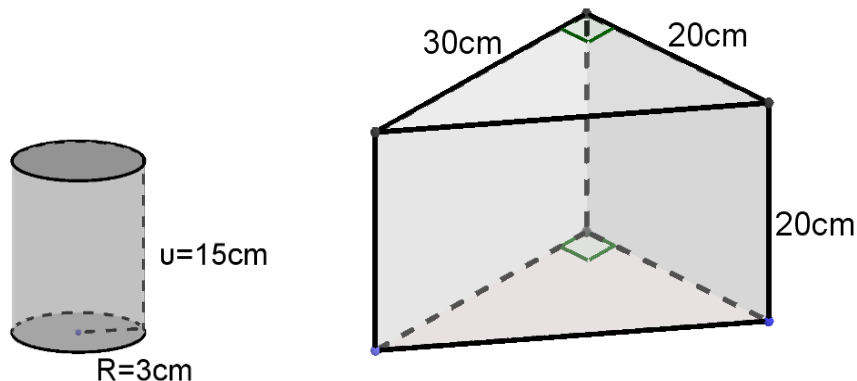
$$\frac{350}{2800} \cdot 100\% = 12,5\%$$

$$\text{Σύνολικό ποσοστό εξόδων} = 12,5 + 30 + 10 + 25 = 77,5\%$$

$$\text{Άρα ποσοστό ενοικίου} = 100 - 77,5 = 22,5\%$$

$$\frac{22,5}{100} \cdot 2800 = €630$$

2. Ένα κουτί σε σχήμα τριγωνικού πρίσματος είναι πλήρως γεμάτο με αλεύρι. Το ύψος του πρίσματος είναι 20cm και η βάση του είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 30cm και 20cm . Το περιεχόμενο του κουτιού αδειάζει σε μικρά κυλινδρικά δοχεία ύψους 15cm και ακτίνας βάσης 3cm . Να υπολογίσετε πόσα τέτοια κυλινδρικά δοχεία μπορούν να γεμίσουν πλήρως με το αλεύρι από το κουτί.



Λύση:

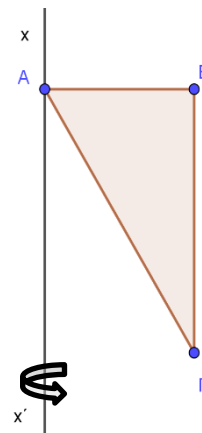
$$V_{\text{κυλίνδρου}} = E_{\beta} \cdot \nu = \pi R^2 \nu = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 135\pi \text{cm}^3$$

$$V_{\text{πρίσματος}} = E_{\beta} \cdot \nu = \frac{30 \cdot 20}{2} \cdot 20 = 300 \cdot 20 = 6000 \text{cm}^3$$

$$\frac{6000}{135\pi} = 14,15$$

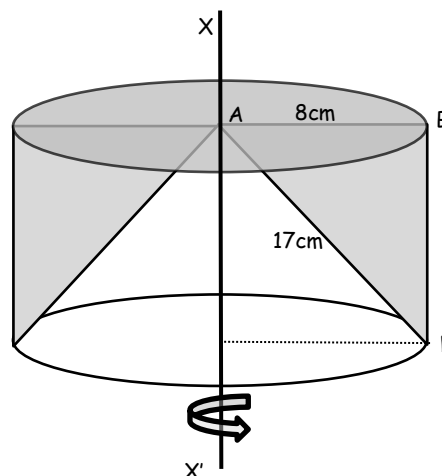
Άρα γεμίζουν πλήρως 14 δοχεία.

3. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία xx' . Η πλευρά AB είναι κάθετη στην ευθεία xx' . Επιπλέον, $A\Gamma = 17\text{cm}$ και $AB = 8\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή.



Λύση:

$$\begin{aligned} \text{Π. Θ: } 17^2 &= 8^2 + (B\Gamma)^2 \\ (B\Gamma)^2 &= 289 - 64 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 225 \Rightarrow B\Gamma \\ &= \sqrt{225} = 15 \text{ cm} \\ E_{\beta}^{\kappa\upsilon\lambda} &= \pi R^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi \text{ cm}^2 \\ E_{\kappa}^{\kappa\upsilon\lambda} &= 2\pi Rv = 2\pi \cdot 8 \cdot 15 = 240\pi \text{ cm}^2 \\ E_{\kappa}^{\kappa\omega\nu} &= \pi R\lambda = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi \text{ cm}^2 \\ E_{\text{ολ}} &= E_{\beta}^{\kappa\upsilon\lambda} + E_{\kappa}^{\kappa\upsilon\lambda} + E_{\kappa}^{\kappa\omega\nu} \\ &= 64\pi + 240\pi + 136\pi \\ &= 440\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



4. Εισαγωγέας ελαστικών αυτοκινήτων έκανε εισαγωγή 200 ελαστικών συνολικής αξίας €5000. Πλήρωσε επιπλέον 2% της αξίας τους για μεταφορικά, 1% για ασφάλιστρα και 17% για εισαγωγικούς δασμούς. Να υπολογίσετε:
- α) πόσα πρέπει να κοστολογεί το κάθε ελαστικό ο εισαγωγέας, ώστε να έχει κέρδος 30% επί του συνολικού κόστους **(8 μονάδες)**
- β) την τιμή πώλησης του κάθε ελαστικού, αν ο καταναλωτής επιβαρύνεται επιπλέον με ΦΠΑ 19%. **(2 μονάδες)**

Λύση:

Α τρόπος

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ τιμή ανά ελαστικό} &= \frac{5000}{200} = 25 \text{ ευρώ} \\ \text{μεταφορικά ανά ελαστικό} &= \frac{2}{100} \cdot 25 = 0,50 \text{ ευρώ} \\ \text{ασφάλιστρα ανά ελαστικό} &= \frac{1}{100} \cdot 25 = 0,25 \text{ ευρώ} \\ \text{εισαγωγικοί δασμοί ανά ελαστικό} &= \frac{17}{100} \cdot 25 = 4,25 \text{ ευρώ} \\ \text{συνολικό κόστος ανά ελαστικό} &= \\ 25 + 0,50 + 0,25 + 4,25 &= 30 \text{ ευρώ} \\ \text{κοστολόγηση με κέρδος 30\%} &= \frac{130}{100} \cdot 30 = 39 \text{ ευρώ} \\ \beta) \text{ τιμή πώλησης με ΦΠΑ} &= \frac{119}{100} \cdot 39 = 46,41 \text{ ευρώ} \end{aligned}$$

Β τρόπος

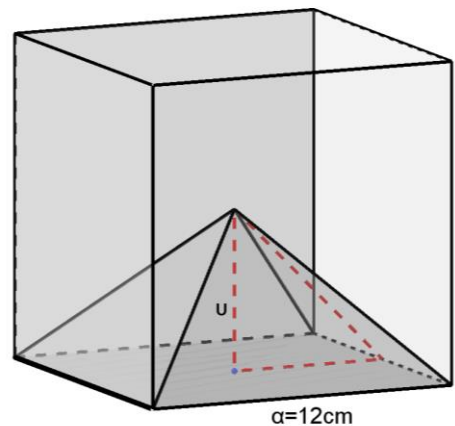
- α) μεταφορικά $= \frac{2}{100} \cdot 5000 = 100$ ευρώ
ασφάλιστρα $= \frac{1}{100} \cdot 5000 = 50$ ευρώ
εισαγωγικοί δασμοί $= \frac{17}{100} \cdot 5000 = 850$ ευρώ
συνολικό κόστος $= 5000 + 100 + 50 + 850 = 6000$ ευρώ
κοστολόγηση με κέρδος 30% $= \frac{130}{100} \cdot 6000 = 7800$ ευρώ
κοστολόγηση ανά ελαστικό $= \frac{7800}{200} = 39$ ευρώ
- β) τιμή πώλησης με ΦΠΑ $= \frac{119}{100} \cdot 39 = 46,41$ ευρώ

5. Από ένα κύβο με ακμή $\alpha = 12 \text{ cm}$ αφαιρούμε μια τετραγωνική πυραμίδα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το ύψος v της πυραμίδας είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ της ακμής του κύβου. Η βάση της πυραμίδας ταυτίζεται με τη βάση του κύβου.

- α) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που απομένει μετά την αφαίρεση της πυραμίδας.
(5 μονάδες)

- β) Αν E_1 είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας και E_2 είναι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου, να δείξετε ότι

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{5}{18} \quad (5 \text{ μονάδες})$$



Λύση:

- α) $V_{\text{κύβου}} = \alpha^3 = 12^3 = 1728 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{πυραμίδας}} = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3} = \frac{12^2 \cdot 8}{3} = \frac{144 \cdot 8}{3} = 384 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{στερεού}} = V_{\text{κύβου}} - V_{\text{πυραμίδας}} = 1728 - 384 = 1344 \text{ cm}^3$

$$\beta) \Pi_{\beta} = 4\alpha = 4 \cdot 12 = 48cm$$

$$\text{П. \Theta: } h^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow h = \sqrt{100} = 10cm$$

$$E_1 = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} = \frac{48 \cdot 10}{2} = 240cm^2$$

$$E_2 = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 12^2 = 864cm^2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{240}{864} = \frac{5}{18}$$