ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Σάββατο 20 Ιουνίου 2020

8:00 π.μ. – 11:00 π.μ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>:

Α1 Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int(6x^5+3)\,dx$

Λύση:

$$\int(6x^5+3)\,dx = 6\frac{x^6}{6}+3x+c = x^6+3x+c$$

Α2 Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=3x-2$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

α΄ τρόπος:

$f'(x)=3,\ \forall\, x\epsilon R \Rightarrow f'(x)>0\ ,\ \forall\, x\epsilon R\ \Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β΄ τρόπος:

$\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2}\ \epsilon R\ \boldsymbol{\mu\varepsilon\ x_1 < x_2} \Rightarrow 3\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{3x_2} \Rightarrow 3\boldsymbol{x_1} \boldsymbol{- 2 < 3x_2 - 2} \Rightarrow f(\boldsymbol{x_1}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$

$\Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Α3 Δίνονται τα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε, εάν χρησιμοποιήσουμε τα ψηφία αυτά χωρίς επανάληψη;

Λύση:

Με βάση την αρχή της απαρίθμησης:

Χ	Ε	Δ	Μ
7	7	6	5

$\Rightarrow 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ αριθμοί

Α4 Δίνεται η λέξη **ΤΗΛΕΔΙΑΣΚΕΨΗ**. Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν.

Λύση:

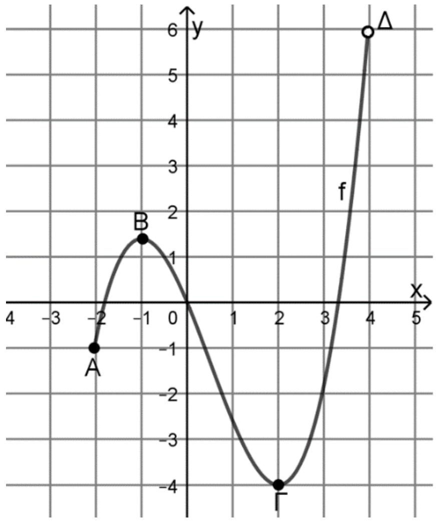
$$M_{12}^{\varepsilon} = \frac{12!}{2!\,2!} = 119750400$$

Α5 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f''(x) = (\alpha + 2)x + 18,\ \alpha \epsilon \mathbb{R}$ και έχει σημείο καμπής με τετμημένη $x = -3$. Να υπολογίσετε την τιμή του α.

Λύση:

Για $x = -3$ Σ.Κ. $\Rightarrow f''(-3) = 0 \Rightarrow (\alpha + 2)(-3) + 18 = 0 \Rightarrow -3\alpha - 6 + 18 = 0$
$-3\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = 4$

Α6 Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[-2, 4)$ και τα σημεία $A(-2, -1), B\left(-1, \frac{7}{5}\right), \Gamma(2, -4)$ και $\Delta(4, 6)$.



(α) Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(β) Να αναφέρετε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης f. Επίσης, να αναφέρετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, αν υπάρχουν.

Λύση:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, -1]$, $[2, +4)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 2]$

β) Στο σημείο $A(-2, -1)$ παρουσιάζει Τ.Ε
Στο σημείο $B\left(-1, \frac{7}{5}\right)$ παρουσιάζει Τ.Μ
Στο σημείο $\Gamma(2, -4)$ παρουσιάζει Τ.Ε και Ο.Ε
$m = -4$ η ελάχιστη τιμή, δεν υπάρχει μέγιστη τιμή

Α7 Με βάση τη συλλογή στοιχείων της Μονάδας Επιδημιολογικής Επιτήρησης του Υπουργείου Υγείας της Κύπρου, μέχρι τις 19 Μαΐου 2020, οι αριθμοί των επιβεβαιωμένων κρουσμάτων της νόσου COVID-19 τα οποία, είτε ανέπτυξαν, είτε δεν ανέπτυξαν συμπτώματα της νόσου, κατά ηλικιακή ομάδα, παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα:

		ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ		
		ΝΑΙ	**ΟΧΙ**	**Σύνολο**
ΗΛΙΚΙΑ	**Κάτω των 30**	**116**	**71**	**187**
	30 - 59	**349**	**156**	**505**
	60 και άνω	**167**	**59**	**226**
	Σύνολο	**632**	**286**	**918**

Αν επιλέξουμε, στην τύχη, ένα από τα πιο πάνω επιβεβαιωμένα κρούσματα της νόσου COVID-19, να βρείτε την πιθανότητα:

(α) να ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19

(β) να ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19 και να ήταν κάτω από 30 ετών

(γ) να μην ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19, αν γνωρίζουμε ότι ήταν 60 ετών και άνω

(δ) να ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19 και να μην ήταν κάτω από 30 ετών

Λύση:

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: Το άτομο ήταν 30 ετών και κάτω

Β: Το άτομο ήταν 60 ετών και άνω

Ν: Το άτομο ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19

Ο: Το άτομο δεν ανέπτυξε συμπτώματα της νόσου COVID-19

$$(\alpha)\ \mathrm{P(N)} = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{632}{918} = \frac{316}{459}$$

$$(\beta)\ \mathrm{P(N \cap A)} = \frac{\nu(N \cap A)}{\nu(\Omega)} = \frac{116}{918} = \frac{58}{459}$$

$$(\gamma)\mathrm{P(O/B)} = \frac{P(O \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\nu(O \cap B)}{\nu(\Omega)}}{\frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)}} = \frac{\frac{59}{918}}{\frac{226}{918}} = \frac{59}{226}$$

$$(\delta)\ \mathrm{P(N \cap A')} = P(N) - P(N \cap A) = \frac{316}{459} - \frac{58}{459} = \frac{258}{459} = \frac{86}{153}$$

Α8 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f'''(x) = 4$. Αν η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής με τετμημένη $x = 1$ και το σημείο $(0, 1)$ είναι τοπικό ακρότατό της, να βρείτε τον τύπο της.

Λύση:

$$f''(x) = \int 4dx = 4x + c_1$$

$$Για\ x = 1\ Σ.Κ. \Rightarrow f''(1) = 0 \ \Rightarrow\ 4 \cdot 1 + c_1 = 0 \ \Rightarrow\ c_1 = -4$$

$$\Rightarrow f''(x) = 4x - 4$$

$$f'(x) = \int (4x - 4)dx = 2x^2 - 4x + c_2$$

$$\text{Για}\ \ x = 0\ \ \text{Τ.Α.} \Rightarrow\ f'(0) = 0\ \ \Rightarrow\ c_2 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (2x^2 - 4x)dx = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 + c_3$$

$$(0,1)\ σημείο\ της\ f\ \Rightarrow f(0) = 1\ \Rightarrow\ c_3 = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1$$

Α9 Η αίθουσα μουσικής ενός σχολείου διαθέτει 3 διαφορετικά πνευστά όργανα, 2 διαφορετικά κρουστά όργανα και 4 διαφορετικά έγχορδα όργανα. Η καθηγήτρια μουσικής του σχολείου επιθυμεί να δημιουργήσει μια μικρή ορχήστρα που να αποτελείται από 6 όργανα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να δημιουργήσει την ορχήστρα αν:

(α) i. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός

ii. πρέπει να αποτελείται από 2 πνευστά, 1 κρουστό και 3 έγχορδα όργανα

(β) πρέπει να αποτελείται από τουλάχιστον 1 κρουστό όργανο

Λύση:

(α) i. $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = 84$

ii. $\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{3} = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

(β) **α΄ τρόπος:** $\binom{2}{1}\binom{7}{5} + \binom{2}{2}\binom{7}{4} = 2 \cdot 21 + 1 \cdot 35 = 77$

β΄ τρόπος: $\binom{9}{6} - \binom{7}{6} = 84 - 7 = 77$

Α10 Το κέρδος $P(x)$, σε ευρώ, μιας επιχείρησης, για κάποιο χρονικό διάστημα, είναι συνάρτηση της ποσότητας x ενός προϊόντος που πουλάει, $x\epsilon[0,+\infty)$. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P'(x)$, της επιχείρησης, ισούται με τη συνάρτηση οριακού κέρδους $p(x)$. Αν η συνάρτηση οριακού κέρδους δίνεται από τον τύπο $p(x) = 1600 - 8x$, να βρείτε:

(α) τον τύπο της συνάρτησης του κέρδους της επιχείρησης $P(x)$, αν γνωρίζουμε ότι για μηδενική πώληση η επιχείρηση έχει μηδενικό κέρδος

(β) τη μέγιστη τιμή του κέρδους $P(x)$ για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα

Λύση:

(α) $P'(x) = p(x) \Rightarrow P'(x) = 1600 - 8x \Rightarrow P(x) = \int(1600 - 8x)\,dx$

$\Rightarrow P(x) = 1600x - 4x^2 + c$

$P(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow P(x) = 1600x - 4x^2$

(β) $P'(x) = 0 \Rightarrow 1600 - 8x = 0 \Rightarrow x = 200$

x	0	200	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	-
$P(x)$	↗		↘

Για $x = 200 \Rightarrow P_{max} = P(200) = 1600 \cdot 200 - 4 \cdot 200^2 = € \, 160000$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>:

Β1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη ή κυρτή, τα σημεία καμπής και τη συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$ $\qquad$ $\boldsymbol{\Pi.O.}:$ $\mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

Για $y = 0 \Rightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow x = 0$ $\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}$ ή $x = 3 \Rightarrow (3,0), (0,0)$

Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

Θέτω $f'(x) = 0 \Rightarrow = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(-x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$

x	-∞		0		2		+∞
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$\Gamma\iota\alpha\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (0,0)\ T.E$ και $\gamma\iota\alpha\ x = 0 \Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow (2,4)\ T.M$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$f''(x) = -6x + 6$

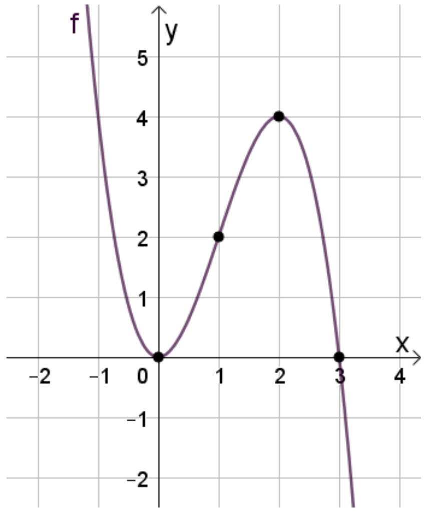
Θέτω $f''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

x	-∞		1		+∞
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$	

Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και κοίλη στο διάστημα $[1, +\infty)$

$\gamma\iota\alpha\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow (1,2)\ \Sigma.K$

Συμπεριφορά στα άκρα του Π.Ο:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3+3x^2) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x^3+3x^2) = \lim_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$$

Β2 Σε μια εταιρεία το 20% των εργαζομένων της ανήκει στις ευπαθείς ομάδες, το 60% των εργαζομένων της έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19 και το 15% των εργαζομένων της ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από τους εργαζόμενους της πιο πάνω εταιρείας, να βρείτε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:

Α: «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες ή να έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19»

Β: «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και να μην έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19»

Γ: «να μην ανήκει στις ευπαθείς ομάδες και να μην έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19»

Δ: «να ανήκει στις ευπαθείς ομάδες, αν γνωρίζουμε ότι έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19»

Λύση:

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Ε: Ο εργαζόμενος ανήκει στις ευπαθείς ομάδες
Ν: Ο εργαζόμενος έχει υποβληθεί σε έλεγχο της νόσου COVID-19

$P(E) = \frac{20}{100}$ $\quad P(N) = \frac{60}{100}$ $\quad P(E \cap N) = \frac{15}{100}$

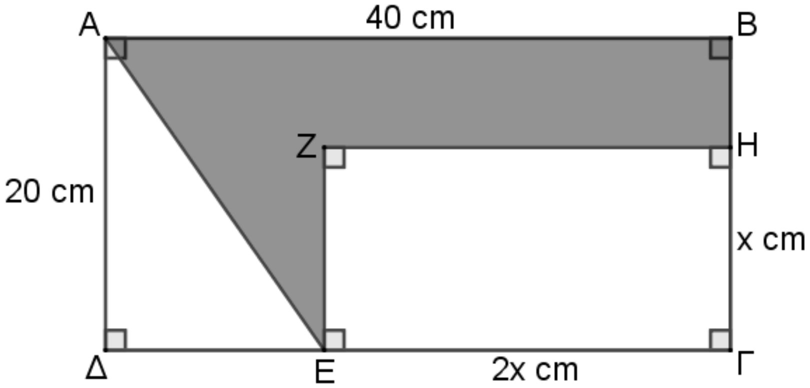
$$\mathrm{P(A)} = P(E \cup N) = P(E) + P(N) - \mathrm{P(E \cap N)} = \frac{20}{100} + \frac{60}{100} - \frac{15}{100} = \frac{13}{20}$$

$$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P(E \cap N')} = P(E) - P(\mathrm{E \cap N}) = \frac{20}{100} - \frac{15}{100} = \frac{1}{20}$$

$$\mathrm{P(\Gamma)} = \mathrm{P(E' \cap N')} = P(E \cup N)' = 1 - P(\mathrm{E \cup N}) = 1 - \frac{65}{100} = \frac{7}{20}$$

$$\mathrm{P(\Delta)} = \mathrm{P(E/N)} = P(E \cup N)' = \frac{\mathrm{P(E \cap N)}}{P(N)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{1}{4}$$

Β3 Στο πιο κάτω σχήμα τα $ΑΒΓΔ$ και $ΖΗΓΕ$ είναι ορθογώνια με $ΑΒ = 40\ cm$, $ΑΔ = 20\ cm$, $ΗΓ = x\ cm$, $ΕΓ = 2x\ cm,\ x\epsilon(0, 20)$.



(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = -2x^2 + 20x + 400$$

(β) Να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του εμβαδού $E(x)$.

Λύση:

(α) $E(x) = E_{ΑΒΓΔ} - E_{ΖΗΓΕ} - E_{ΑΕΔ} \Rightarrow\ E(x) = 20 \cdot 40 - 2x \cdot x - \frac{(40-2x)\cdot 20}{2}$

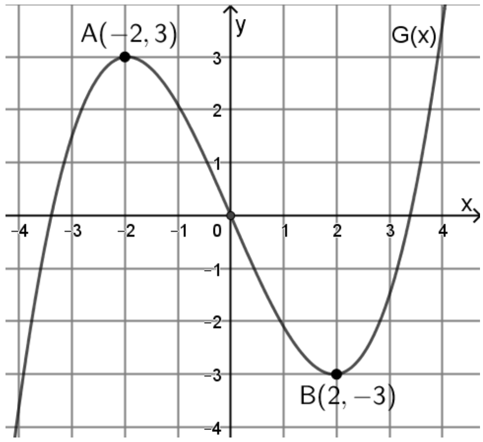
$\Rightarrow\ E(x) = 800 - 2x^2 - 400 + 20x\ \Rightarrow\ E(x) = -2x^2 + 20x + 400$

(β) $E'(x) = -4x + 20$, $\quad E'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 20 = 0 \Rightarrow x = 5$

x	0		5		20
$E'(x)$	‖	+	0	-	
$E(x)$	‖	↗		↘	

Για $x = 5\ \Rightarrow\ E_{max} = E(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 + 400 =\ 450\ cm^2$

B4 Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης G. Τα σημεία Α και Β είναι τοπικά ακρότατα και η αρχή των αξόνων είναι σημείο καμπής της συνάρτησης G, για την οποία γνωρίζουμε ότι: $\int g(x)dx = G(x) + c$



(α) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης g με τον άξονα των x, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(β) Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να το χαρακτηρίσετε, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Λύση:

(α) $\int g(x)dx = G(x) + c \;\Rightarrow\; g(x) = G'(x)$

Η συνάρτηση $G(x)$ παρουσιάζει Τ.Α. στα σημεία στα οποία $x = -2$ και $x = 2$ και επομένως η $G'(x)$ στα σημεία αυτά μηδενίζεται και αλλάζει και πρόσημο.
Αφού $g(x) = G'(x)$ το ίδιο συμβαίνει και με τη $g(x)$.

Επομένως η συνάρτηση g τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $(-2,0)$ και $(2,0)$.

(β) $g'(x) = G''(x)$

Η συνάρτηση G παρουσιάζει Σ.Κ. στο σημείο για το οποίο $x = 0$ και επομένως η $G''(x)$ στο σημείο αυτό μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο.
Αφού $g'(x) = G''(x)$ το ίδιο συμβαίνει και με τη $g'(x)$. Επομένως,

x	-∞ 0 +∞	
$g'(x) = G''(x)$	- 0	+
$g(x)$	↘	↗

Δηλαδή,

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\,0, +\infty)$

Επομένως η g παρουσιάζει Τ.Ε. στο σημείο για το οποίο $x = 0$.

Β5 Ένας μαθητής πρόκειται να γίνει συνδρομητής σε μια ιστοσελίδα, στο διαδίκτυο, η οποία παρέχει εξ΄ αποστάσεως εκπαίδευση. Μεταξύ άλλων θα πρέπει να επιλέξει και ένα κωδικό πρόσβασης ο οποίος αποτελείται από δέκα χαρακτήρες. Ο σχηματισμός του κωδικού αυτού πρέπει να συνάδει με τις πιο κάτω προδιαγραφές:

- Οι δυο πρώτοι χαρακτήρες πρέπει να είναι οποιαδήποτε 2 διαφορετικά γράμματα από τα 26 μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου.
- Οι επόμενοι πέντε χαρακτήρες πρέπει να αποτελούνται από όλα τα ψηφία του συνόλου Α = {1, 2, 3, 4, 5} με οποιαδήποτε σειρά.
- Οι τρεις τελευταίοι χαρακτήρες πρέπει να είναι 3 από τους εξής 5 ειδικούς χαρακτήρες του πληκτρολογίου: @, #, $, %, &. Οι ειδικοί αυτοί χαρακτήρες μπορούν να επαναλαμβάνονται.

  Για παράδειγμα ένας τέτοιος κωδικός θα μπορούσε να ήταν «bk52134@@&».

(α) Πόσους διαφορετικούς κωδικούς θα μπορούσε να σχηματίσει ο μαθητής αυτός με τις πιο πάνω προδιαγραφές;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός ο μαθητής να επιλέξει ένα κωδικό που να έχει πρώτο γράμμα το m, πρώτο ψηφίο το 5 και πρώτο ειδικό χαρακτήρα το @;

Λύση:

(α) Με βάση την αρχή της απαρίθμησης:

Φάσεις	**Λατινικοί χαρακτήρες**	**Αριθμητικό μέρος**	**Ειδικοί χαρακτήρες**
Τρόποι	$\boldsymbol{\Delta_2^{26}}$	$\boldsymbol{M_5}$	$\boldsymbol{\delta_3^5}$

$\Rightarrow \Delta_2^{26} \cdot \mathrm{M}_5 \cdot \delta_3^5 = 650 \cdot 120 \cdot 125 = 9750000$

(β) Με βάση την αρχή της απαρίθμησης:

Φάσεις	**Λατινικοί χαρακτήρες**	**Αριθμητικό μέρος**	**Ειδικοί χαρακτήρες**
Τρόποι	$\boldsymbol{\Delta_1^{25}}$	$\boldsymbol{M_4}$	$\boldsymbol{\delta_2^5}$

$\Rightarrow \Delta_1^{25} \cdot \mathrm{M}_4 \cdot \delta_2^4 = 25 \cdot 24 \cdot 25 = 15000$

Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

Β: «Ο κωδικός του μαθητή έχει πρώτο γράμμα το m, πρώτο ψηφίο το 5 και πρώτο ειδικό χαρακτήρα το @»

$\Rightarrow P(B) = \frac{15000}{9750000} = \frac{1}{650}$