

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ (400)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : ΔΕΥΤΕΡΑ, 03 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

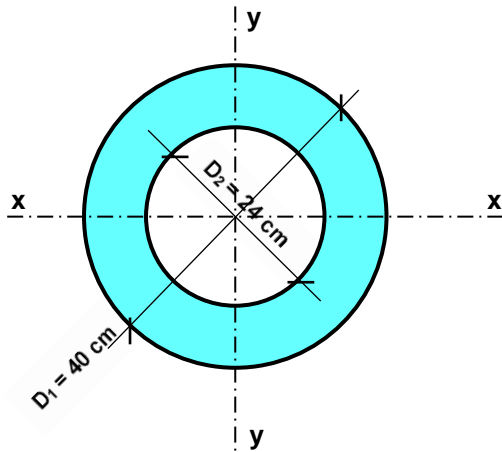
ΩΡΑ : 8:00 – 10:30

ΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από δώδεκα (12) ερωτήσεις

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με τέσσερις (4) μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας, ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$ της σύνθετης διατομής, που φαίνεται στο **Σχήμα 1**.



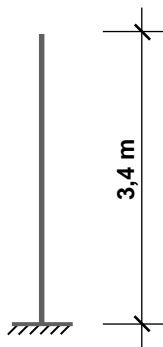
εξωτερική διάμετρος $D_1 = 40 \text{ cm}$
εσωτερική διάμετρος $D_2 = 24 \text{ cm}$

ΣΧΗΜΑ 1

Ροπή αδράνειας σύνθετης διατομής

$$I_{x-x} = \frac{3,14 \cdot 40^4}{64} - \frac{3,14 \cdot 24^4}{64} = 125600 - 16277,76 = \underline{109322,24 \text{ cm}^4}$$

2. Χαλύβδινη ράβδος κυκλικής κοίλης διατομής με εξωτερική διάμετρο $D = 15 \text{ cm}$, εσωτερική διάμετρο $d = 13 \text{ cm}$ και μήκος $L = 3,4 \text{ m}$, είναι πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο, όπως δείχνει το **Σχήμα 2**. Να υπολογίσετε τη λυγιρότητα της ράβδου.



Ελεύθερο μήκος λογισμού

$$\ell = 2 \cdot L = 2 \cdot 3,4 \text{ m} = 6,80 \text{ m} = 680 \text{ cm}$$

Ακτίνα αδράνειας

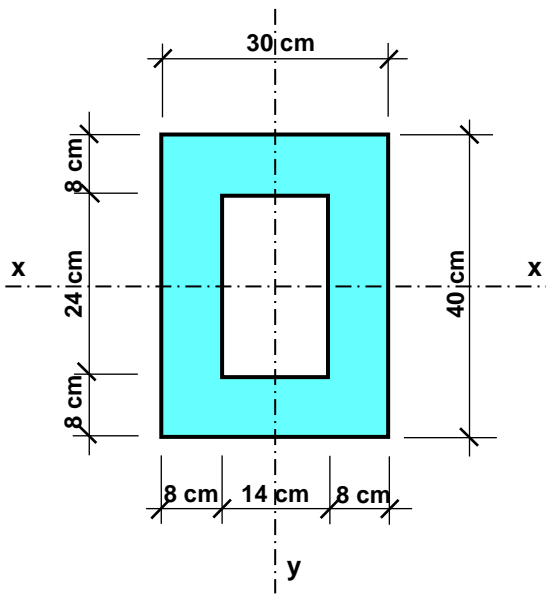
$$i = 0,25 \sqrt{15^2 + 13^2} = 4,96 \text{ cm}$$

Λυγιρότητα

$$\lambda = \frac{\ell}{i_{ελ}} = \frac{680 \text{ cm}}{4,96 \text{ cm}} = \underline{137,10}$$

ΣΧΗΜΑ 2

3. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$, της σύνθετης διατομής του Σχήματος 3.



ΣΧΗΜΑ 3

Ροπή αδράνειας σύνθετης διατομής

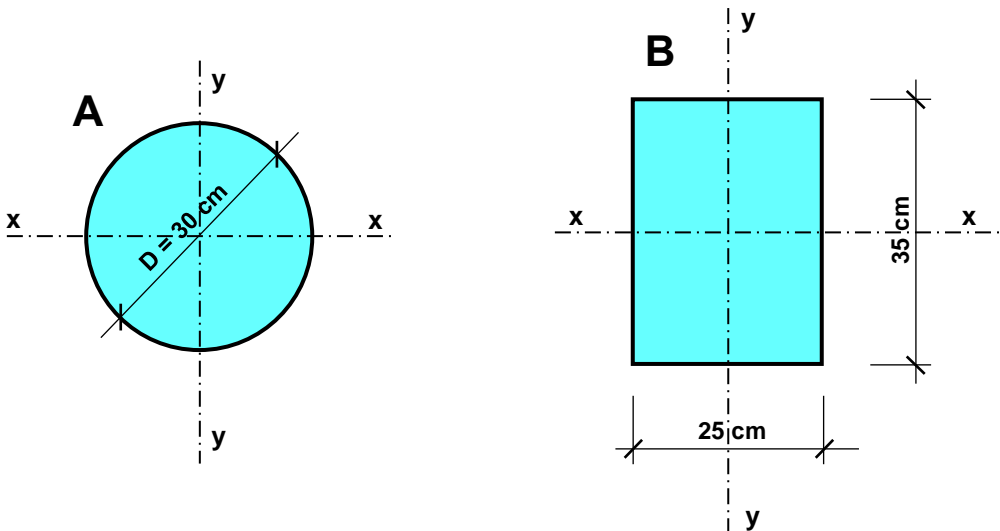
$$I_{x-x} = \frac{30 \cdot 40^3}{12} - \frac{14 \cdot 24^3}{12}$$

$$I_{x-x} = 160000 - 16128 = \underline{143872 \text{ cm}^4}$$

Ροπή αντίστασης σύνθετης διατομής

$$W_{x-x} = \frac{I_{x-x}}{y} = \frac{143872}{20} = \underline{7193,6 \text{ cm}^3}$$

4. Να υπολογίσετε την ακτίνα αδράνειας i_x των διατομών **A** και **B** του Σχήματος 4.



ΣΧΗΜΑ 4

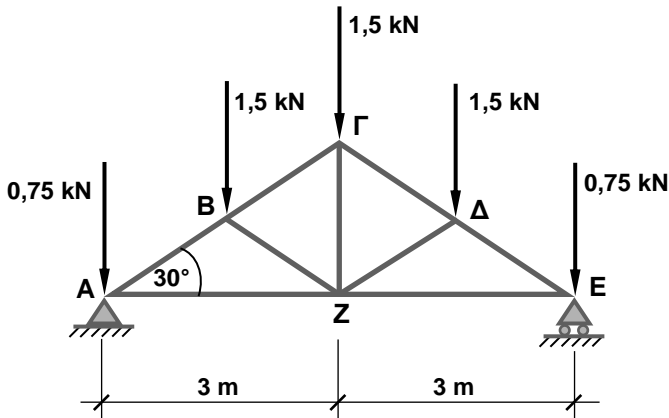
Ακτίνα αδράνειας Σχήματος A

$$i_x = 0,25 D = 0,25 \cdot 30 = \underline{7,5 \text{ cm}}$$

Ακτίνα αδράνειας Σχήματος B

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{35}{\sqrt{12}} = \underline{10,10 \text{ cm}}$$

5. Να υπολογίσετε το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης και να καθορίσετε το είδος καταπόνησης που αναπτύσσεται στη ράβδο **AB** του δικτυώματος του **Σχήματος 5**, με τη μέθοδο της ανάλυσης – ισοροπίας των κόμβων.



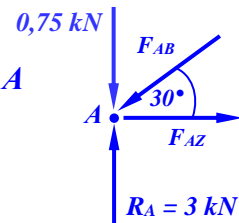
ΣΧΗΜΑ 5

Λόγω συμμετρίας

$$R_A = R_E = \frac{0,75 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 0,75}{2}$$

$$R_A = R_E = 3 \text{ kN}$$

Κόμβος A



$$\sum F_y = 0$$

$$R_A - 0,75 - F_{AB} \cdot \eta\mu 30^\circ = 0$$

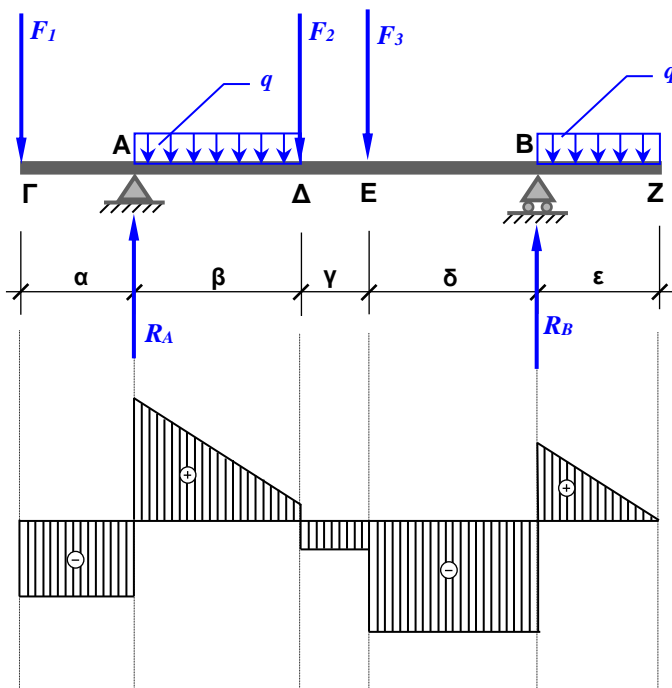
$$3 - 0,75 - F_{AB} \cdot 0,5 = 0$$

$$-0,5 F_{AB} = -2,25$$

$$\underline{F_{AB} = 4,5 \text{ kN}}$$

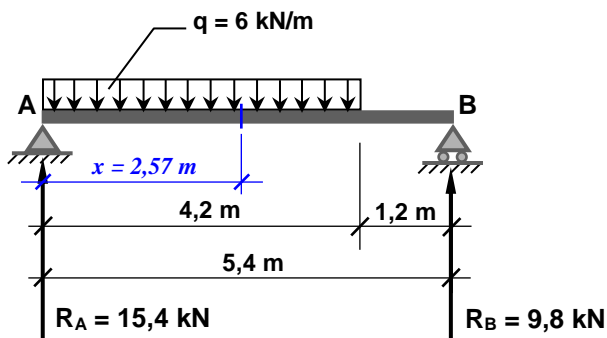
→ θλιβόμενη ράβδος

6. Στο **Σχήμα 6** δίνονται η αμφιπροέχουσα δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**). Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο **Δ.Τ.Δ.**



ΣΧΗΜΑ 6

7. Αμφιέρειστη δοκός φορτίζεται όπως δείχνει το **Σχήμα 7**. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ροπή κάμψης που αναπτύσσεται στη δοκό, αν οι αντιδράσεις της δοκού είναι $R_A = 15,4 \text{ kN}$ και $R_B = 9,8 \text{ kN}$.



ΣΧΗΜΑ 7

Θέση μέγιστης ροπής κάμψης

$$Q(x) = 0 \rightarrow R_A - q \cdot x = 0$$

$$15,4 - 6 \cdot x = 0 \rightarrow x = 2,57 \text{ m}$$

Μέγιστη ροπή κάμψης

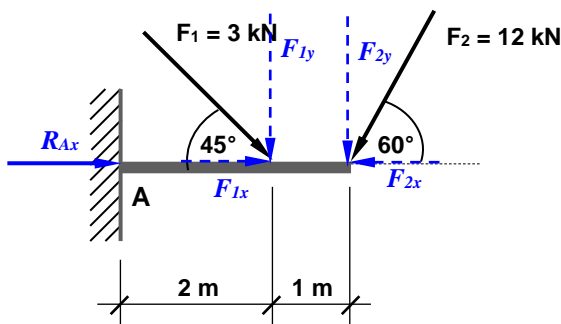
$$M_{max} = 15,4 \cdot 2,57 - 6 \cdot 2,57 \cdot 1,285 = \underline{19,76 \text{ kNm}}$$

.....

.....

.....

8. Για τη δοκό πρόβολο του **Σχήματος 8**, να υπολογίσετε την οριζόντια αντίδραση R_{Ax} και να τη σχεδιάσετε στο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 8

$$F_{1x} = F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 3 \cdot 0,707 = 2,12 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 12 \cdot 0,5 = 6 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_{Ax} + F_{1x} - F_{2x} = 0$$

$$R_{Ax} + 2,12 - 6 = 0 \rightarrow \underline{R_{Ax} = 3,88 \text{ kN}}$$

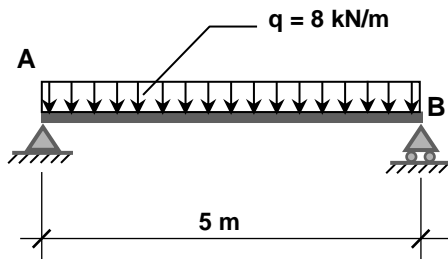
.....

.....

.....

.....

9. Η αμφιέριστη δοκός του **Σχήματος 9** φορτίζεται με συνεχές ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο $q = 8 \text{ kN/m}$ σε όλο το μήκος της $\ell = 5 \text{ m}$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση κάμψης σ (N/mm^2), που αναπτύσσεται στη διατομή της, όταν δίνεται η ροπή αντίστασης $W = 2250 \text{ cm}^3$.



ΣΧΗΜΑ 9

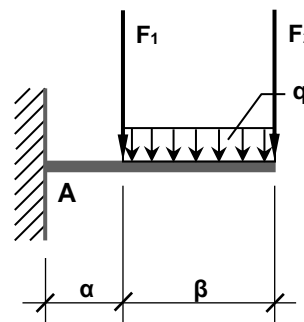
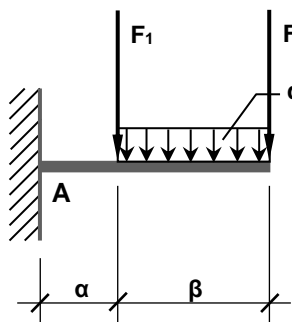
Μέγιστη ροπή κάμψης

$$M_{max} = \frac{q \cdot \ell^2}{8} = \frac{8 \cdot 5^2}{8} = 25 \text{ kNm}$$

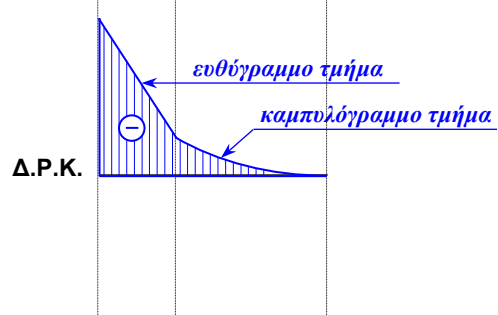
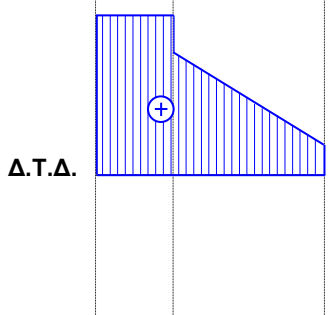
Μέγιστη τάση κάμψης

$$\sigma_{μεγ.} = \frac{25 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{2250 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = \underline{\underline{11,11 \text{ N/mm}^2}}$$

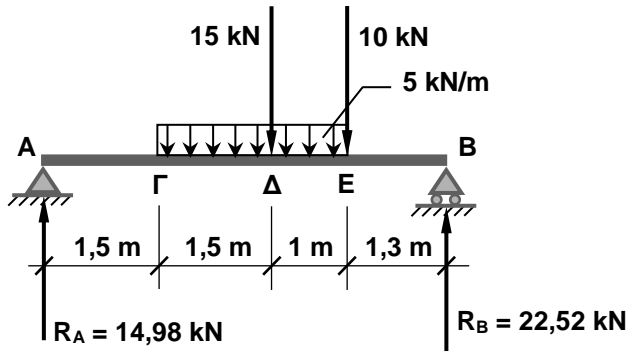
10. Για την πιο κάτω δοκό πρόβολο του **Σχήματος 10**, να σχεδιάσετε το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων Q και το διάγραμμα των ροπών κάμψης M , χωρίς να τη λύσετε. Στο διάγραμμα των ροπών κάμψης να σημειώσετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματα.



ΣΧΗΜΑ 10



11. Να υπολογίσετε την τέμνουσα δύναμη δεξιά του σημείου **E** ($Q_E^{\text{δεξ}}$) για τη δοκό που σας δίνεται στο **Σχήμα 11**.

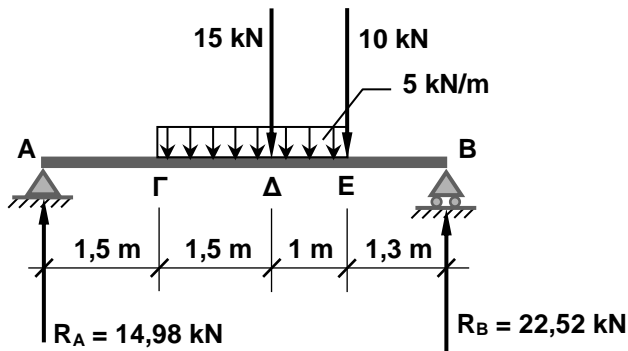


ΣΧΗΜΑ 11

Τέμνουσα δύναμη δεξιά του σημείου E

$$Q_E^{\text{δεξ}} = R_A - 5 \cdot 2,5 - 15 - 10 = 14,98 - 5 \cdot 2,5 - 15 - 10 = \underline{\underline{-22,52 \text{ kN}}}$$

12. Να υπολογίσετε τη ροπή κάμψης στο σημείο **E** (M_E) για τη δοκό που σας δίνεται στο **Σχήμα 12**.



ΣΧΗΜΑ 12

Ροπή κάμψης στο σημείο E

$$M_E = R_A \cdot 4 - 5 \cdot 2,5 \cdot 1,25 - 15 \cdot 1 = 14,98 \cdot 4 - 5 \cdot 2,5 \cdot 1,25 - 15 \cdot 1 = \underline{\underline{29,30 \text{ kNm}}}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από τέσσερις (4) ερωτήσεις

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με οκτώ (8) μονάδες.

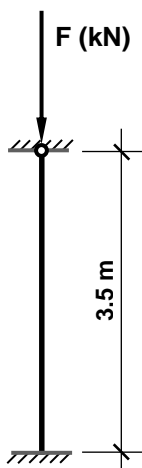
13. Να υπολογίσετε το επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού, που μπορεί να μεταφέρει χαλύβδινος στύλος, ο οποίος στηρίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 13 α** και έχει ορθογωνική κοίλη διατομή όπως το **Σχήμα 13 β**.

Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε mm

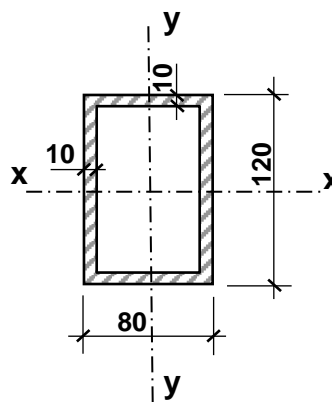
Δίνονται: μέτρο ελαστικότητας
συντελεστής ασφάλειας

$$E = 210 \text{ kN/mm}^2$$

$$\gamma = 3$$



ΣΧΗΜΑ 13 α



ΣΧΗΜΑ 13 β

Ελεύθερο μήκος λυγισμού

$$\ell = 0,7 \cdot 3,5 = 2,45 \text{ m} = 2450 \text{ mm}$$

Ελάχιστη ροπή αδράνειας

$$I_{ελ.} = \frac{120 \cdot 80^3}{12} - \frac{100 \cdot 60^3}{12} = 5120000 - 1800000 = 3320000 \text{ mm}^4$$

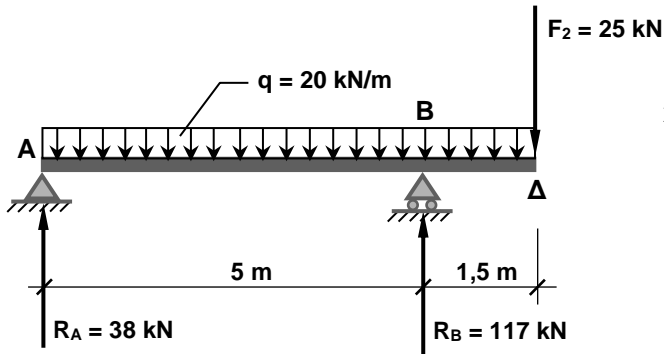
Κρίσιμο φορτίο λυγισμού

$$F_{κρ.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.}}{\ell^2} = \frac{3,14^2 \cdot 210 \text{ kN/mm}^2 \cdot 332 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{2450^2 \text{ mm}^4} = 1145,2 \text{ kN}$$

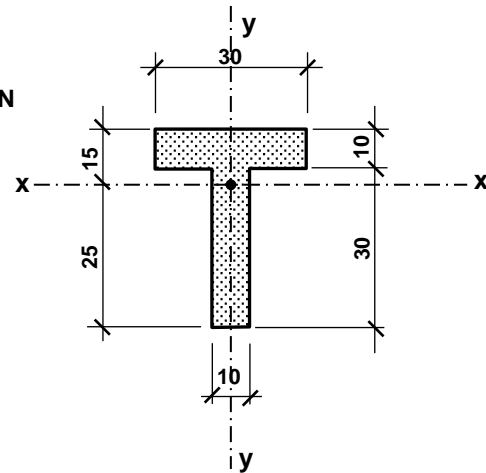
Επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού

$$F_{επ.} = \frac{F_{κρ.}}{\gamma} = \frac{1145,2}{3} = \underline{\underline{381,73 \text{ kN}}}$$

14. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τάση θλίψης και εφελκυσμού, σε N/mm^2 , που θα αναπτυχθούν στην προέχουσα δοκό, η οποία φορτίζεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 14 α και έχει διατομή T όπως φαίνεται στο Σχήμα 14 β. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm .



ΣΧΗΜΑ 14 α



ΣΧΗΜΑ 14 β

Θέση μέγιστης θετικής ροπής κάμψης

$$Q_{(x)} = 0 \rightarrow R_A - q \cdot x = 0$$

$$38 - 20 \cdot x = 0 \rightarrow x = 1,9 \text{ m}$$

$$d_{1y} = 15 - 5 = 10 \text{ cm}$$

$$d_{2y} = 25 - 15 = 10 \text{ cm}$$

Μέγιστη θετική ροπή κάμψης

$$M_{max} = 38 \cdot 1,9 - 20 \cdot 1,9 \cdot 0,95 = 36,10 \text{ kNm}$$

Μέγιστη αρνητική ροπή κάμψης

$$M_B = 38 \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5 = -60 \text{ kNm}$$

Ροπή αδράνειας

$$I_{x-x} = \left(\frac{30 \cdot 10^3}{12} + 30 \cdot 10 \cdot 10^2 \right) + \left(\frac{10 \cdot 30^3}{12} + 10 \cdot 30 \cdot 10^2 \right)$$

$$I_{x-x} = (2500 + 30000) + (22500 + 30000) = 85000 \text{ cm}^4 = 85 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Εφελκυστική τάση (πάνω)

$$\sigma_1 = \frac{60 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 150 \text{ mm}}{85 \cdot 10^7 \text{ mm}^4} = \underline{10,59 \text{ N/mm}^2}$$

Θλιπτική τάση (κάτω)

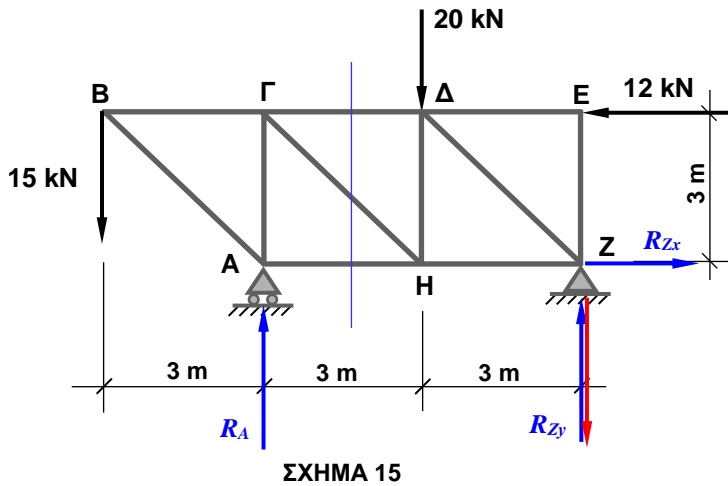
$$\sigma_2 = \frac{60 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 250 \text{ mm}}{85 \cdot 10^7 \text{ mm}^4} = \underline{17,65 \text{ N/mm}^2}$$

15. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 15**.

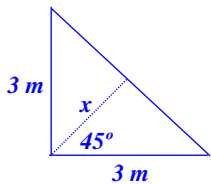
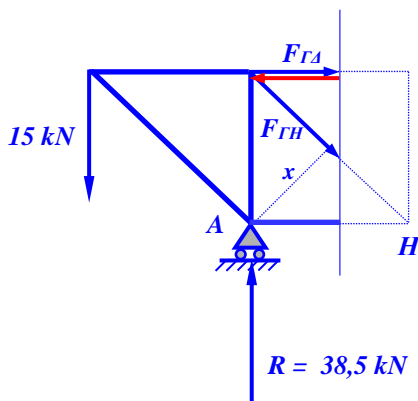
(α) Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **Z**.

(β) Να υπολογίσετε το μέγεθος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **ΓΔ** και **ΓΗ** με τη μέθοδο των τομών.

(γ) Να υπολογίσετε το μέγεθος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **ΕΔ** και **ΕΖ** με τη μέθοδο ανάλυσης – ισοροπίας των κόμβων.



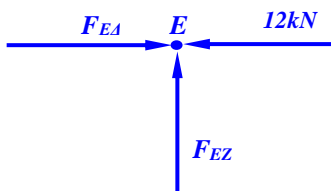
ΣΧΗΜΑ 15



$$\sigma \nu \nu 45^\circ = \frac{x}{3}$$

$$x = 2,12 \text{ m}$$

Κόμβος Ε



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{E\Delta} - 12 = 0$$

$$\underline{F_{E\Delta} = 12 \text{ kN} \rightarrow \text{θλιβόμενη}}$$

$$\underline{\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{Ez} = 0}$$

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_{Zx} - 12 = 0 \rightarrow \underline{R_{Zx} = 12 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-15 \cdot 3 + 20 \cdot 3 - 12 \cdot 3 - R_{Zy} \cdot 6 = 0$$

$$-45 + 60 - 36 - 6R_{Zy} = 0$$

$$\underline{R_{Zy} = -3,5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_Z = 0$$

$$-15 \cdot 9 + R_A \cdot 6 - 20 \cdot 3 - 12 \cdot 3 = 0$$

$$-135 + 6R_A - 60 - 36 = 0$$

$$\underline{R_A = 38,5 \text{ kN}}$$

Έλεγχος $\Sigma F_y = 0$

$$-15 - 20 - 3,5 + 38,5 = 0$$

Ράβδος ΓΔ

$$\Sigma M_H = 0$$

$$-15 \cdot 6 + 38,5 \cdot 3 + F_{\Gamma\Delta} \cdot 3 = 0$$

$$\underline{F_{\Gamma\Delta} = -8,5 \text{ kN} \rightarrow \text{θλιβόμενη}}$$

Ράβδος ΓΗ

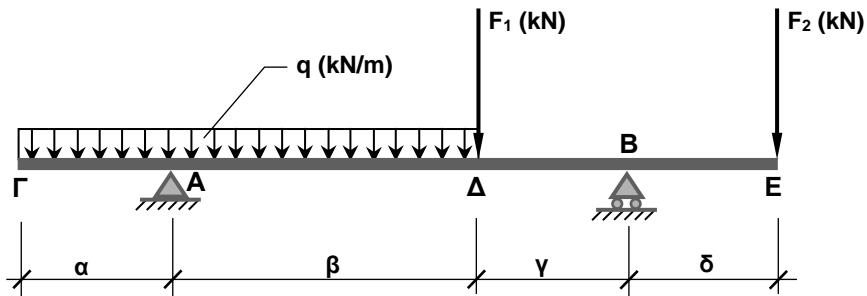
$$\Sigma M_A = 0$$

$$-15 \cdot 3 - F_{\Gamma\Delta} \cdot 3 + F_{\Gamma H} \cdot x = 0$$

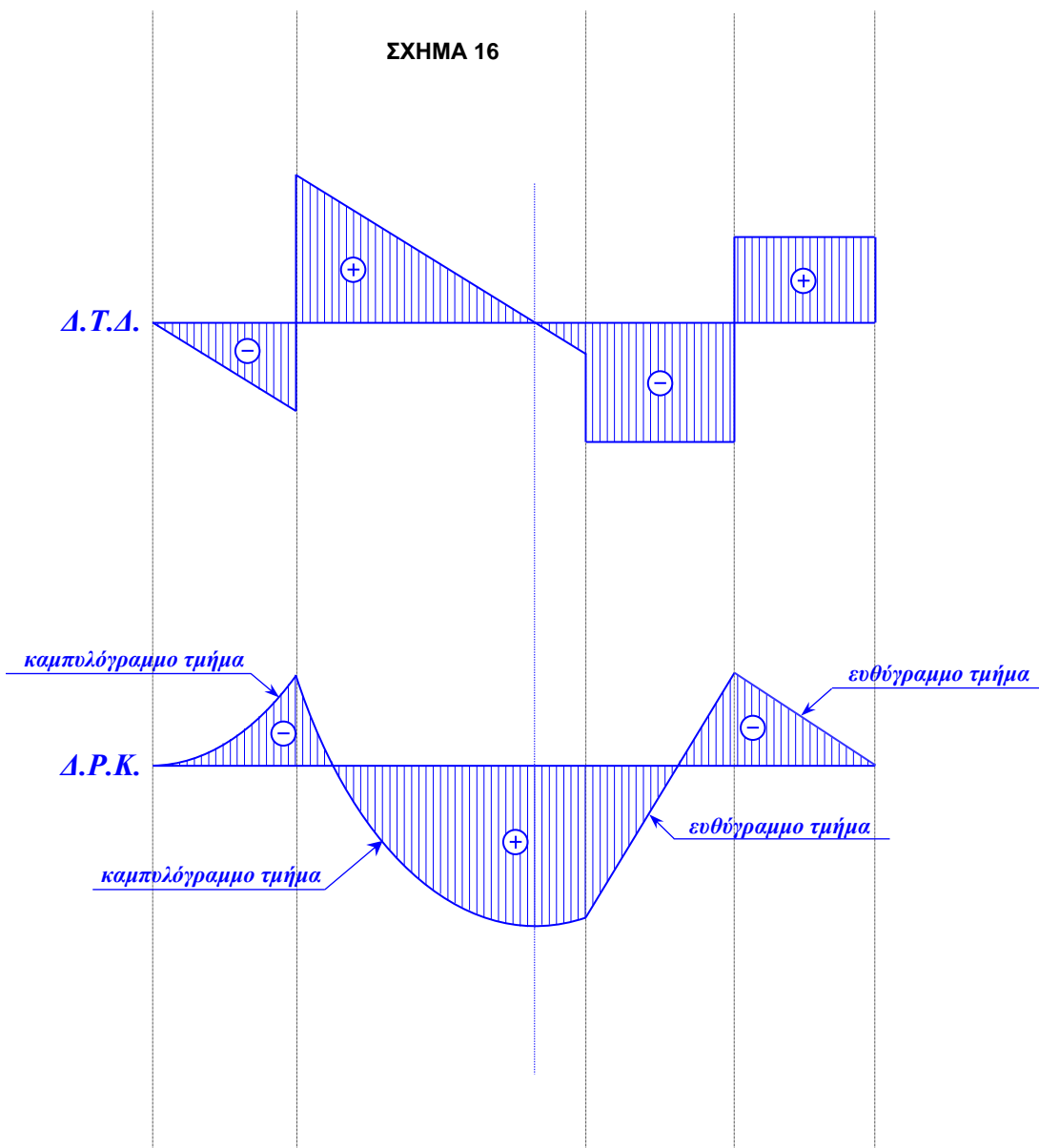
$$-15 \cdot 3 - 8,5 \cdot 3 + F_{\Gamma H} \cdot 2,12 = 0$$

$$\underline{F_{\Gamma H} = 33,25 \text{ kN} \rightarrow \text{εφελκυστική}}$$

16. Για την πιο κάτω δοκό του **Σχήματος 16** να σχεδιάσετε το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων **Q** και το διάγραμμα των ροπών κάμψης **M**, χωρίς να τη λύσετε. Στο διάγραμμα των ροπών κάμψης να σημειώσετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματα.



ΣΧΗΜΑ 16



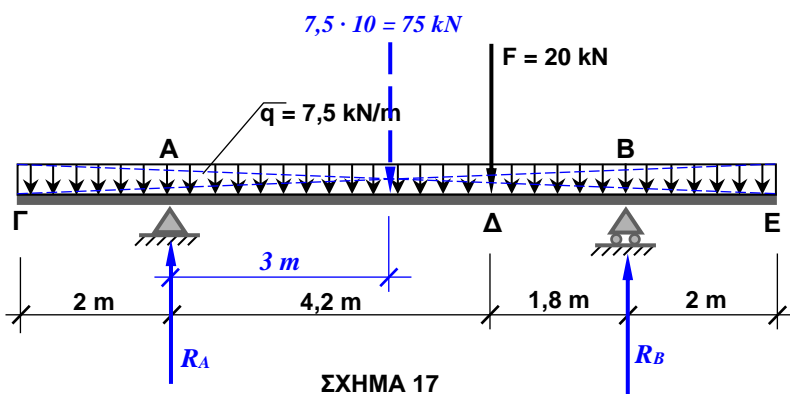
ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΜΕΡΟΣ Γ': Αποτελείται από μία (1) ερώτηση

Η ερώτηση βαθμολογείται με είκοσι (20) μονάδες.

17. Αμφιπροέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 17**.

- (α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- (β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ**, **Δ** και **Ε**.
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση **x** από το σημείο στήριξης **A**, όπου αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης **M_{max}**.
- (δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M_{max}**.
- (ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων **Q** και των ροπών κάμψης **M** και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ**, **Δ** και **Ε**, καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M_{max}**.



ΣΧΗΜΑ 17

Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0$$

$$7,5 \cdot 10 \cdot 3 + 20 \cdot 4,2 - R_B \cdot 6 = 0$$

$$225 + 84 - 6R_B = 0$$

$$6R_B = 309$$

$$\underline{R_B = 51,5 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$R_A \cdot 6 - 7,5 \cdot 10 \cdot 3 - 20 \cdot 1,8 = 0$$

$$6R_A - 225 - 36 = 0$$

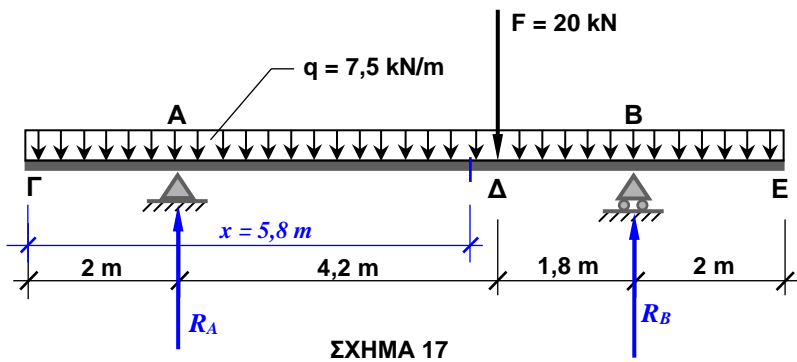
$$6R_A = 261$$

$$\underline{R_A = 43,5 \text{ kN}}$$

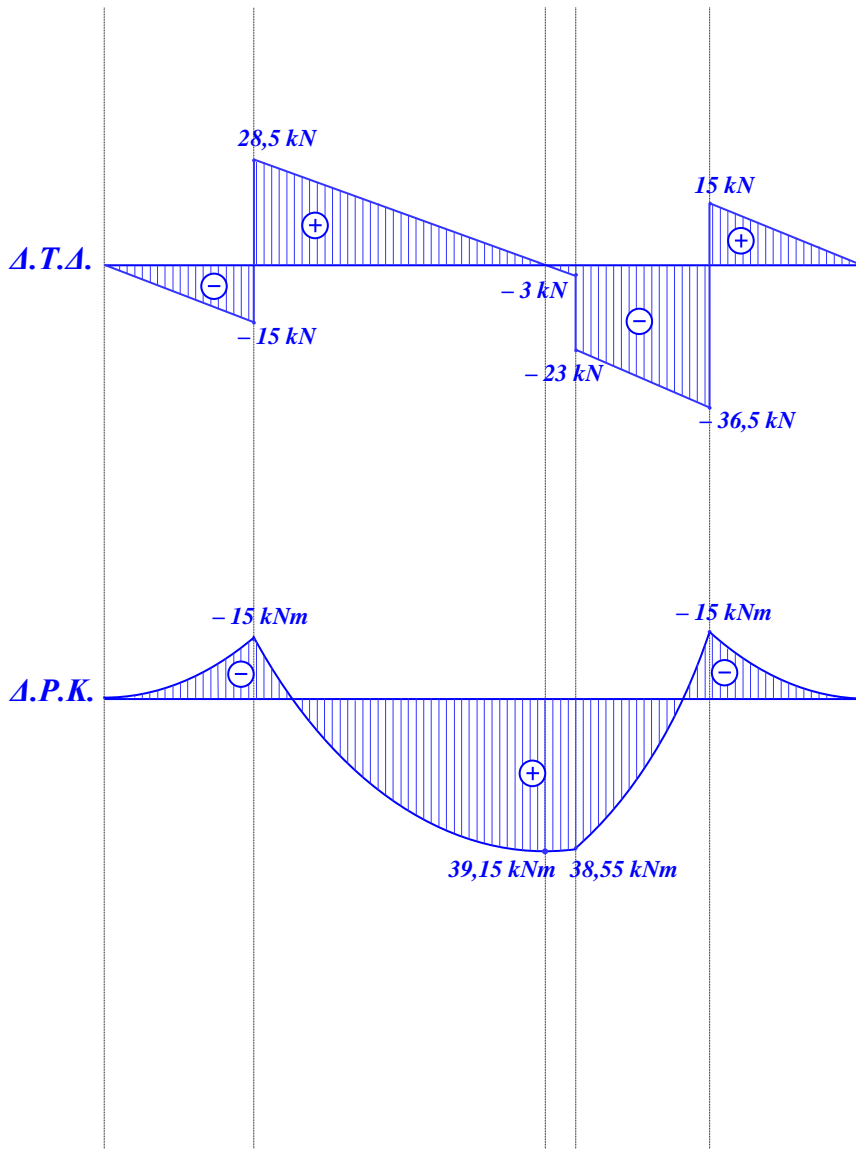
Έλεγχος

$$\Sigma F_y = 0$$

$$43,5 + 51,5 - 7,5 \cdot 10 - 20 = 0$$



ΣΧΗΜΑ 17



Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_{\Gamma} = 0$$

$$Q_A^{ap.} = -7,5 \cdot 2 = -15 \text{ kN}$$

$$Q_A^{\delta\epsilon\zeta.} = -7,5 \cdot 2 + 43,5 = 28,5 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{ap.} = 28,5 - 7,5 \cdot 4,2 = -3 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\zeta.} = -3 - 20 = -23 \text{ kN}$$

$$Q_B^{ap.} = -23 - 7,5 \cdot 1,8 = -36,5 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\zeta.} = -36,5 + 51,5 = 15 \text{ kN}$$

$$Q_E = 15 - 7,5 \cdot 2 = 0$$

Θέση μέγιστης θετικής ροπής κάμψης

$$Q(x) = 0$$

$$\rightarrow 43,5 - 7,5 \cdot x = 0$$

$$7,5 x = 43,5$$

$$x = 5,8 \text{ m}$$

Ροπές κάμψης

$$M_{\Gamma} = 0$$

$$M_A = -7,5 \cdot 2 \cdot 1 = -15 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta} = 43,5 \cdot 4,2 - 7,5 \cdot 6,2 \cdot 3,1 = 38,55 \text{ kNm}$$

$$M_B = 43,5 \cdot 6 - 7,5 \cdot 8 \cdot 4 - 20 \cdot 1,8 = -15 \text{ kNm}$$

$$M_E = 43,5 \cdot 8 - 7,5 \cdot 10 \cdot 5 - 20 \cdot 3,8 + 51,5 \cdot 2 = 0$$

Μέγιστη θετική ροπή κάμψης

$$M_{max.} = 43,5 \cdot (5,8 - 2) -$$

$$- 7,5 \cdot 5,8 \cdot 2,9 = 39,15 \text{ kNm}$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ