ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (37)

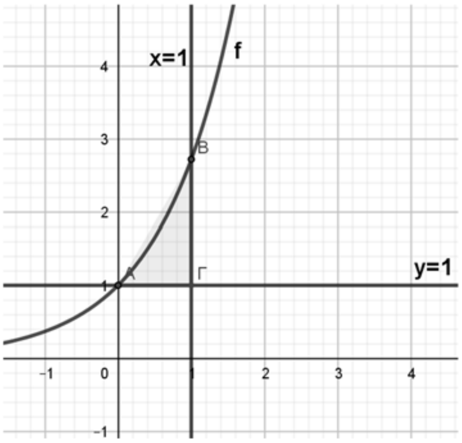
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 31 Μαΐου 2019
8:00 – 11:00

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> **ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

1.	Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\left(6\chi^2+\eta\mu\chi+\frac{4}{\chi}-2\right)d\chi$. **ΛΥΣΗ** $\int(6\chi^2+\eta\mu\chi+\frac{4}{\chi}-2)dx=2\chi^3-\sigma\upsilon\nu\chi+4\ln\lvert\chi\rvert-2\chi+c$
2.	Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, με $P(A')=\frac{3}{4}$ και $P(B)=\frac{2}{3}$. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα, να βρείτε τις πιθανότητες : (α) $P(A\cup B)$. (β) $P(A - B)$. **ΛΥΣΗ** $P(A)=1-P(A')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$, (Α,Β Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$ $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$
3.	Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{25}+\frac{\psi^2}{9}=1$, με εστίες Ε και Ε΄ . (α) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης. (β) Αν $T(\chi_1,\psi_1)$ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης, να αποδείξετε ότι : $(TE')-(TE)=\frac{8}{5}\chi_1$. **ΛΥΣΗ** α=5 , β=3 $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=5^2-3^2 \quad \gamma=4$ α) $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4}{5}$ β) $(TE')-(TE)=\alpha+\varepsilon\cdot\chi_1-\alpha+\varepsilon\cdot\chi_1=2\varepsilon\cdot\chi_1=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\chi_1=\frac{8}{5}\chi_1$

4. (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με τύπο $f(\chi)=e^{\chi}$, $\chi\in\mathbb{R}$ και των ευθειών $\chi=1$ και $\psi=1$.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου, γύρω από την ευθεία $\psi=1$.



ΛΥΣΗ

$$E=\int_0^1(e^x-1)d\chi=[e^x-\chi]_0^1=e-1-1=(e-2)\tau\mu$$

$$V=\pi\int_0^1(e^x-1)^2d\chi=\pi\int_0^1(e^{2x}-2e^x+1)d\chi=\pi[\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+\chi]_0^1=\pi(\frac{e^2}{2}-2e+1-\frac{1}{2}+2)$$

$$=\pi(\frac{e^2}{2}-2e+\frac{5}{2})=\frac{\pi}{2}(e^2-4e+5)\kappa\mu$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(\chi)=\chi^3-3\chi^2+2\chi+1$. Να δείξετε ότι ικανοποιούνται για την συνάρτηση f όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$. Στη συνέχεια, να βρείτε τα $\xi\in(0,2)$, που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle.

ΛΥΣΗ

- Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πολυωνυμική
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-6x+2$
- $f(0)=f(2)=1$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2):f'(\xi)=0$

$3\xi^2$-6ξ+2=0 $\xi_1=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$, δεκτή $\xi_2=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$, δεκτή γιατί ανήκουν στο $(0,2)$

6. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων και να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$

	ΛΥΣΗ $\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} \equiv \frac{A}{\kappa+1}+\frac{B}{\kappa+2}$ $1 \equiv A(\kappa+2)+B(\kappa+1)$ $1 \equiv (A+B)\kappa+2A+B$ $A+B=0$ και $2A+B=1$ $A=1$ και $B=-1$ έστω $\Sigma_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$, το μερικό άθροισμα της σειράς $\Rightarrow \Sigma_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(\frac{1}{\kappa+1}-\frac{1}{\kappa+2}) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....+(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1})+(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2})$ $\Rightarrow \Sigma_\nu = \frac{1}{2}-\frac{1}{\nu+2}$ Άρα $\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} = \lim_{\nu\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu+2}) = \frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$
7.	Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi = \eta\mu\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\chi^2}{\sqrt{1-\chi^2}}d\chi$. ΛΥΣΗ Για $\chi=0 \Rightarrow \theta=0$ Για $\chi=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$ $dx = \sigma\upsilon\nu\theta\ d\theta$ $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\chi^2}{\sqrt{1-\chi^2}}d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu^2\theta}{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}}\sigma\upsilon\nu\theta\ d\theta =$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu^2\theta}{\lvert\sigma\upsilon\nu\theta\rvert}\sigma\upsilon\nu\theta\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\sigma\upsilon\nu\theta\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\eta\mu^2\theta\ d\theta =$ $\left(\sigma\upsilon\nu\theta>0, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}\ d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\eta\mu 2\theta}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$
8.	Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(\chi)=\chi+\frac{\ln\chi}{\chi+1}$. **ΛΥΣΗ** $\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{\ln x}{x+1}\right) = \lim_{x\to 0^+}(x)+\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) = -\infty$ Άρα χ=0 κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\ln x}{x(x+1)})=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x(x+1)}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}x(x+1)=+\infty$ Άρα έχουμε απροσδιοριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x(x+1))'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)x}=0$$

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Del'Hospital,

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1+0=1\Rightarrow \lambda=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(\chi)-\chi)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x+1}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)=+\infty$ Άρα έχουμε απροσδιοριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow$$

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Del'Hospital,

$$\lim_{x\to\infty}(f(\chi)-\chi)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x+1}=0\Rightarrow \beta=0$$

Άρα $\psi=\chi$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

9. (α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί 9 - ψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4.

(β) Να βρείτε πόσοι από τους 9- ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (α) έχουν όλα τα 2 σε συνεχόμενες θέσεις.

(γ) Να βρείτε πόσοι από τους 9- ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (α) έχουν τα ψηφία 1, 1, 3 σε άρτιες θέσεις (δηλαδή στην 2η, 4η, 6η, 8η θέση).

1η θέση	2η θέση	3η θέση	4η θέση	5η θέση	6η θέση	7η θέση	8η θέση	9η θέση

9 –ψήφιος αριθμός

ΛΥΣΗ:

(α) Είναι επαναληπτικές μεταθέσεις των εννέα ψηφίων. Επομένως όλοι οι 9-ψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται είναι:

$$M_{\varepsilon}^{9}=\frac{9!}{2!\,2!\,4!}=3780$$

(β) Θεωρούμε όλα τα 2 σαν μια ομάδα και έχουμε επαναληπτικές μεταθέσεις των έξι ψηφίων. Επομένως όλοι οι 9-ψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται είναι:

$$M_{\varepsilon}^{6}\cdot M_{4}^{4}=\frac{6!}{2!\,2!}\cdot\frac{4!}{4!}=180$$

(γ) Τα ψηφία 1,1,3 τοποθετούνται στις άρτιες θέσεις με

$$\binom{4}{3}\frac{3!}{2!} = 12 \ \text{τρόπους}$$

και τα υπόλοιπα έξι ψηφία τοποθετούνται στις υπόλοιπες έξι θέσεις με

$$\frac{6!}{2!\,4!} = 15 \ \text{τρόπους}$$

Επομένως το πλήθος των 9-ψήφιων αριθμών που σχηματίζονται είναι

$$\binom{4}{3}\frac{3!}{2!}\cdot\frac{6!}{2!\,4!} = 12\cdot 15 = 180$$

10. (α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνάρτηση, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $f'(\chi)>0$, $\chi\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση, $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(\chi)=\ln\left(e^{\chi}+\frac{\chi^3}{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Λύση:

(α) Έστω τυχαία σημεία $\chi_1,\chi_2\in[\alpha,\beta]$ με $\alpha\le\chi_1<\chi_2\le\beta$. Τότε αφού η f είναι συνεχής στο $[\chi_1,\chi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (χ_1,χ_2) ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής.

Επομένως υπάρχει $\xi\in(\chi_1,\chi_2)$ τέτοιο ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi)=\dfrac{f(\chi_2)-f(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1} \\ f'(\chi)>0\ \forall\ \chi\in(\alpha,\beta) \end{array}\right\}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\chi_2)-f(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}>0$$

Επομένως αφού $\chi_2-\chi_1>0\Rightarrow f(\chi_2)-f(\chi_1)>0\Leftrightarrow f(\chi_2)>f(\chi_1)$

Δηλαδή για τυχαία χ_1,χ_2 με $\chi_1<\chi_2$ αποδείξαμε ότι $f(\chi_1)<f(\chi_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$

(β) $f(\chi)=\ln\left(e^{\chi}+\dfrac{\chi^3}{3}\right)\Rightarrow f'(\chi)=\dfrac{e^{\chi}+\chi^2}{e^{\chi}+\dfrac{\chi^3}{3}}>0\ \forall\ \chi\in[0,+\infty)\ \ (\chi>0)$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $f'(\chi)>0\ \forall\chi\in[0,+\infty)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

(Εφαρμόζουμε το θεώρημα για [α,β] όπου α=0 και β>0)

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(\chi)=\dfrac{6\chi}{\chi^2+\chi+1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

ΛΥΣΗ

ΠΟ: $\mathbb{R}$

$\chi=0 \Rightarrow \psi=0$

$\psi=0 \Rightarrow \chi=0$

$$f'(\chi)=\frac{6(\chi^2+\chi+1)-6\chi(2\chi+1)}{(\chi^2+\chi+1)^2}=\frac{-6\chi^2+6}{(\chi^2+\chi+1)^2}$$

$f'(\chi)=0 \Rightarrow -6\chi^2+6=0 \Leftrightarrow \chi=\pm 1$

χ	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(\chi)$		-	0	+	0	-	
$f(\chi)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$

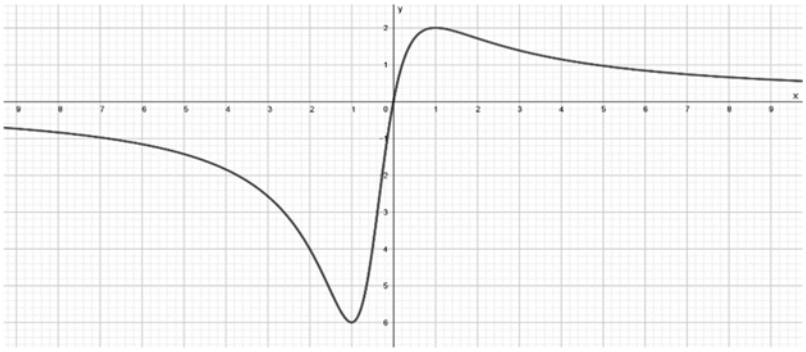
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=-6$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=2$

Ασύμπτωτες

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\chi\to\infty}\dfrac{6\chi}{\chi^2+\chi+1}=\lim\limits_{\chi\to\infty}\dfrac{6\chi}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to\infty}\dfrac{6}{\chi}=0 \\ \lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{6\chi}{\chi^2+\chi+1}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{6\chi}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{6}{\chi}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Η ευθεία $\psi=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφ. παράστασης της f στο $\pm\infty$



2. Ένα σχολείο έχει 200 μαθητές. Για τη μετάβασή τους στο σχολείο, 120 μαθητές χρησιμοποιούν λεωφορείο, 60 μαθητές χρησιμοποιούν αυτοκίνητο και οι υπόλοιποι πηγαίνουν με τα πόδια. Αν ένας μαθητής χρησιμοποιεί για τη μετάβασή του στο σχολείο λεωφορείο, η πιθανότητα να καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο είναι $\frac{1}{3}$, αν χρησιμοποιεί αυτοκίνητο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{4}$, ενώ αν πηγαίνει με τα πόδια, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{8}$. Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή του σχολείου.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο.

(β) Αν ο μαθητής που επιλέξαμε καθυστέρησε το πρωί να έλθει στο σχολείο, να βρείτε την πιθανότητα να ήλθε στο σχολείο με λεωφορείο

ΛΥΣΗ

(α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Λ: ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με λεωφορείο

Α: ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με αυτοκίνητο

Π: ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με τα πόδια

Κ: ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με καθυστέρηση

$$P(K)=P(\Lambda\cap K)+P(A\cap K)+P(\Pi\cap K)$$

$$=P(\Lambda)\cdot P(K/\Lambda)+P(A)\cdot P(K/A)+P(\Pi)\cdot P(K/\Pi)$$

$$=\frac{120}{200}\cdot\frac{1}{3}+\frac{60}{200}\cdot\frac{1}{4}+\frac{20}{200}\cdot\frac{1}{8}=\frac{23}{80}$$

(β)

$$P(\Lambda/K)=\frac{P(\Lambda\cap K)}{P(K)}=\frac{\frac{120}{200}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{23}{80}}=\frac{16}{23}$$

.

3. (α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (κ), ο οποίος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες των συντεταγμένων Οχ και Οψ και το σημείο επαφής του με τον θετικό ημιάξονα Οχ είναι το σημείο Α(2,0).

(β) Αν ο πιο πάνω κύκλος (κ) έχει εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4\chi-4\psi+4=0$, να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (κ), σε τυχαίο σημείο του $T(2+2\sigma\upsilon\nu\theta,\ 2+2\eta\mu\theta)$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, είναι $\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+\eta\mu\theta\cdot y=2\sigma\upsilon\nu\theta+2\eta\mu\theta+2$.

(γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα των τετμημένων $\chi'\chi$ στο σημείο Β και η ευθεία ΤΑ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $\psi'\psi$ στο σημείο Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

ΛΥΣΗ:

(α)

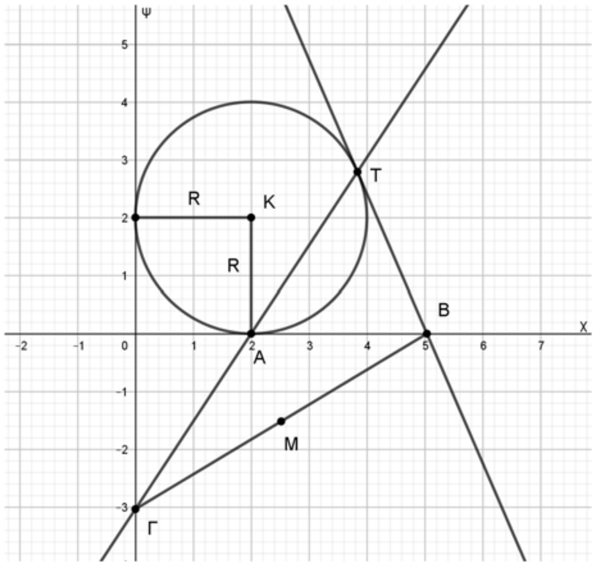
$$\left.\begin{matrix} K(\alpha,\beta) \\ A(2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow \beta = 2$$

Εξίσωση κύκλου:

$$(\chi-2)^2 + (\psi-2)^2 = 4$$

$$T(2+2\sigma\upsilon\nu\theta, 2+2\eta\mu\theta)$$

$$\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 4\psi + 4 = 0$$



(β) $2\chi + 2\psi\psi' - 4 - 4\psi' = 0 \Leftrightarrow \psi' = \dfrac{2-\chi}{\psi-2}$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{2-2-2\sigma\upsilon\nu\theta}{2+2\eta\mu\theta-2} = \frac{-\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

εφ: $\psi - 2 - 2\eta\mu\theta = \dfrac{-\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}(\chi - 2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\theta\cdot\psi - 2\eta\mu\theta - 2\eta\mu^2\theta = -\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\chi + 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\chi + \eta\mu\theta\cdot\psi = 2\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2$$

(γ) Για το Β: $\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\chi + \eta\mu\theta\cdot 0 = 2\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2 \Leftrightarrow \chi = \dfrac{2\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$

Άρα $B\left(\dfrac{2\eta\mu\theta + 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 0\right)$

$$\lambda_{TA} = \frac{2+2\eta\mu\theta}{2+2\sigma\upsilon\nu\theta-2} = \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

ΤΑ: $\psi = \dfrac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}(\chi-2)$

Άρα $\Gamma\left(0, \dfrac{-2(1+\eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$

	$M\left(\dfrac{ημθ+συνθ+1}{συνθ},\dfrac{-(1+ημθ)}{συνθ}\right)$ $\left.\begin{aligned} χ&=\dfrac{ημθ+συνθ+1}{συνθ} \\ ψ&=\dfrac{-(1+ημθ)}{συνθ} \Rightarrow 1+ημθ=-συνθ\cdot ψ\end{aligned}\right\\}\Rightarrow χ=\dfrac{συνθ-συνθ\cdot ψ}{συνθ}$ $χ=\dfrac{συνθ(1-ψ)}{συνθ}\Leftrightarrow χ=1-ψ$
4.	Δίνεται η συνάρτηση g, με τύπο $g(χ)=e^{-χ}$, $χ\in\mathbb{R}$. (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη κυρτότητα. (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(0,g(0))$. (γ) Να αποδείξετε ότι $e^{-χ}\geq 1-χ$, $χ\in\mathbb{R}$. ΛΥΣΗ (α) Μελετούμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για την συνάρτηση $g(x)=e^{-x}, x\in\mathbb{R}$ $g'(x)=-e^{-x}$ $g''(x)=e^{-x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ Επομένως η συνάρτηση είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. --- (β) $A(0,g(0))=(0,1)$. Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A είναι $\lambda_\varepsilon=g'(0)=-1$ Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(0,1)$ είναι $(\varepsilon)\colon\ y-1=-x$ ή $y=1-x$ --- (γ) <u>1ος τρόπος:</u> Αφού η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε το διάγραμμά της βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon)\colon\ y=1-x$ εκτός από το σημείο $A(0,1)$ (Σημείο επαφής). Άρα $g(x)\geq y_\varepsilon$ ή $e^{-x}\geq 1-x$, $x\in\mathbb{R}$

<u>2ος τρόπος:</u> Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{-x} - 1 + x$$

Η παράγωγος της f είναι

$$f'(x) = -e^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας της f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	Ο.Ε	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

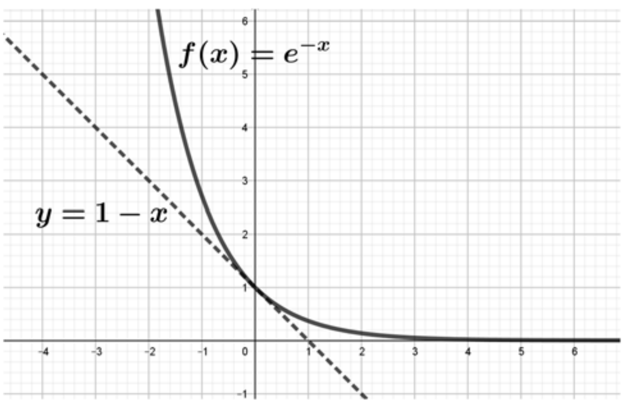
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για $x = 0$ έχουμε ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$

Επομένως θα έχουμε ότι

$$f(x) \geq f(0) \text{ ή } e^{-x} - 1 + x \geq 0 \text{ ή } e^{-x} \geq 1 - x \ , x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$.



5.	(α) Να αποδείξετε ότι: $(\text{τοξεφ}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. (β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα , τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \text{τοξεφ}(x^2)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. (γ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\alpha]$, $\alpha > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x^2 = u$, να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^{\alpha} x^3 g(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} x g(x) dx$. (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^3 \text{τοξεφ}(x^2)$, τον άξονα των τετμημένων $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΛΥΣΗ

(α) Θεωρούμε την συνάρτηση ρ με τύπο

$$y = \rho(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Τότε $x = \varepsilon\varphi y,\ \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$1 = \tau\varepsilon\mu^2 y \frac{dy}{dx} \ \text{ ή } \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tau\varepsilon\mu^2 y} = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Επομένως

$$(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(β) Παραγωγίζοντας την συνάρτηση

$f(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi(x^2)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Επομένως

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Για $x = 0$ έχουμε ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$

Επομένως έχουμε ότι

$$f(x) \geq f(0) \ \text{ ή } \ f(x) \geq 0 \ , x \in \mathbb{R}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την δοθείσα αντικατάσταση έχουμε

$$\mathrm{d}(x^2) = \mathrm{du} \text{ ή } 2xdx = du \text{ ή } xdx = \frac{1}{2}du$$

και για $x = 0,\ x = \alpha$, αντίστοιχα παίρνουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης $\mathrm{u} = 0, \mathrm{u} = \alpha^2$.
Επομένως

$$\int_0^\alpha x^3 g(x^2)dx = \int_0^\alpha x^2 \cdot xg(x^2)dx = \int_0^{\alpha^2} ug(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} ug(u)du$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} xg(x)dx.$$

(δ) Επειδή $f(x) = τοξεφ(x^2) \geq 0 \ \ για\ x \in \mathbb{R}$ και $x^3 \geq 0 \ \ για\ x \geq 0$ θα έχουμε ότι

$$h(x) = x^3 τοξεφ(x^2) \geq 0 \ \ για\ x \in [0,1]$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_0^1 x^3 τοξεφ(x^2)\, dx$$

Θέτουμε $g(x) = τοξεφ(x^2)$ η οποία είναι συνεχής στο$[0,1]$, με α=1, χρησιμοποιώντας το (γ) παίρνουμε:

$$E = \int_0^1 x^3 τοξεφ(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xτοξεφx dx = \frac{1}{2}\int_0^1 τοξεφx d\left(\frac{x^2}{2}\right) dx =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}τοξεφx\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}[x - τοξεφx]_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \quad τ.μ$$