

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ**

**ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΚΑΙ
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

20 25 - 20 26

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΣΕΙΡΑ Α'

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : Τετάρτη, 13 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: Μηχανική και Κατασκευές

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ : thdm301

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με τέσσερις (4) μονάδες. Σύνολο σαράντα (40) μονάδες.

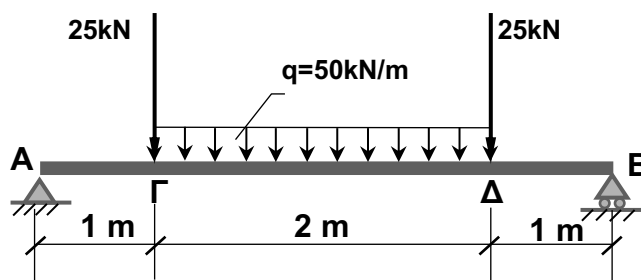
1. Για την αμφιέριστη δοκό που φορτίζεται **συμμετρικά**, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1**, να κυκλώσετε τις **δύο** ορθές απαντήσεις από τις πιο κάτω παραδοχές:

α) Η τιμή της τέμνουσας δύναμης στο κέντρο της δοκού ισούται με μηδέν.

β) Η τιμή της τέμνουσας δύναμης αριστερά του σημείου Γ, είναι: $Q_{\Gamma}^{\alpha\rho} = +75\text{kN}$.

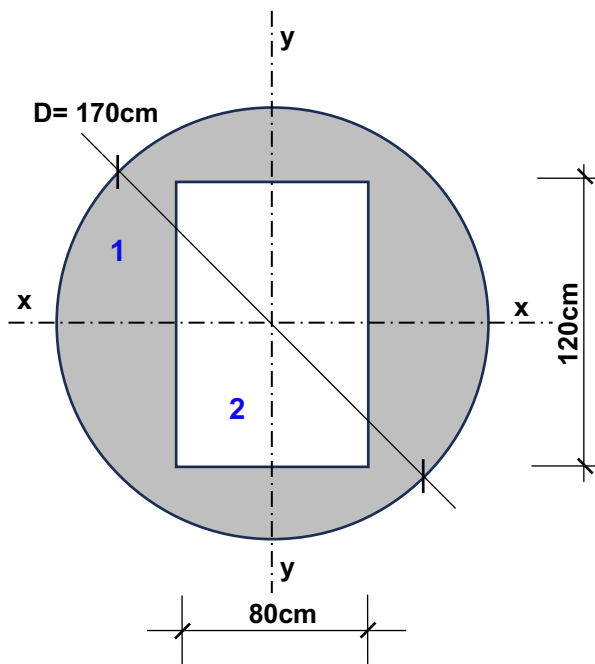
γ) Η τιμή της τέμνουσας δεξιά του σημείου Δ, είναι : $Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\xi} = +75\text{kN}$.

δ) Το Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων (Δ.Τ.Δ) είναι σταθερό μεταξύ των σημείων Γ και Δ.



ΣΧΗΜΑ 1

2. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας I_{x-x} , ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x-x$ της σύνθετης διατομής που δίνεται στο **Σχήμα 2**.



ΣΧΗΜΑ 2

Υπολογισμός ροπής αδράνειας I_{x-x}

$$I_{x-x} = I_{1x-x} - I_{2x-x} =$$

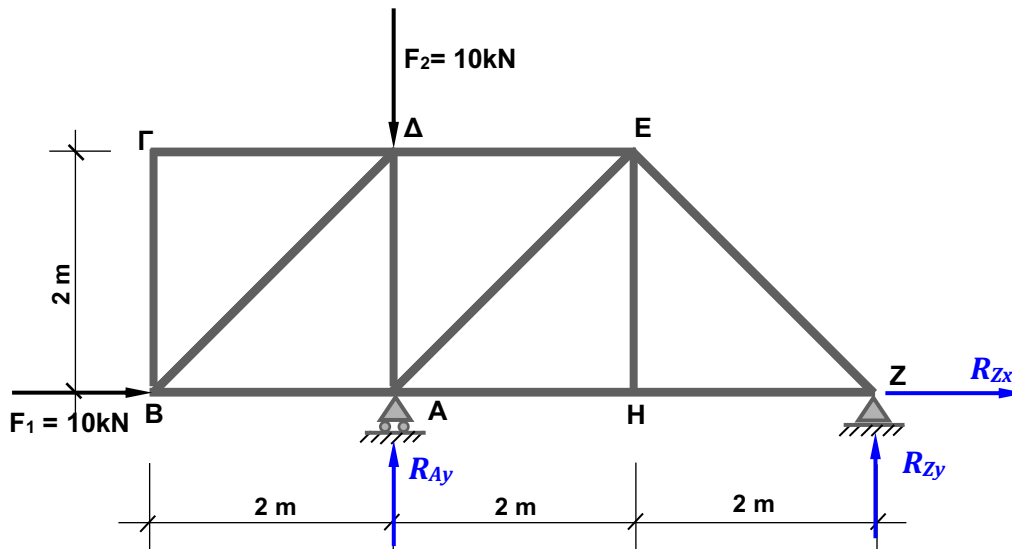
$$\frac{\pi \cdot 170^4}{64} - \frac{(80) \cdot (120)^3}{12}$$

$$I_{x-x} = 40998275 - 11520000 \Rightarrow$$

$$I_{x-x} = 29478275\text{cm}^4$$

3. Δίνεται το δικτύωμα με γεωμετρία και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3**:

- α) Να **σχεδιάσετε** στο σχήμα τις αντιδράσεις στις στηρίξεις,
 β) Να **εντοπίσετε** και να **καταγράψετε** τρεις (3) ράβδους που έχουν μηδενική εσωτερική δύναμη.

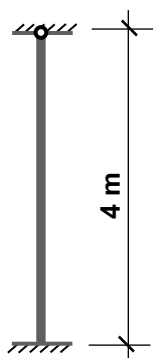


ΣΧΗΜΑ 3

(β) Οι ράβδοι ΕΗ, ΓΒ, ΓΔ, ΒΔ και ΔΕ έχουν μηδενική εσωτερική δύναμη. Να επιλεγούν τρεις από αυτές.

4. Ξύλινο υποστύλωμα ύψους **L=4m**, κυκλικής διατομής, στηρίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 4**. Να υπολογίσετε την ελάχιστη ροπή αδράνειας $I_{ελ}$ της διατομής, που απαιτείται για να μην εκδηλωθεί σε αυτό λυγισμός, εάν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι **$F_{κρ.} = 300kN$** .

Δίνεται: **$E = 10kN/mm^2$**



ΣΧΗΜΑ 4

$$F_{κρ} = \frac{\pi^2 E I_{ελ}}{\rho^2} \Rightarrow I_{ελ} = \frac{F_{κρ} \rho^2}{\pi^2 E}$$

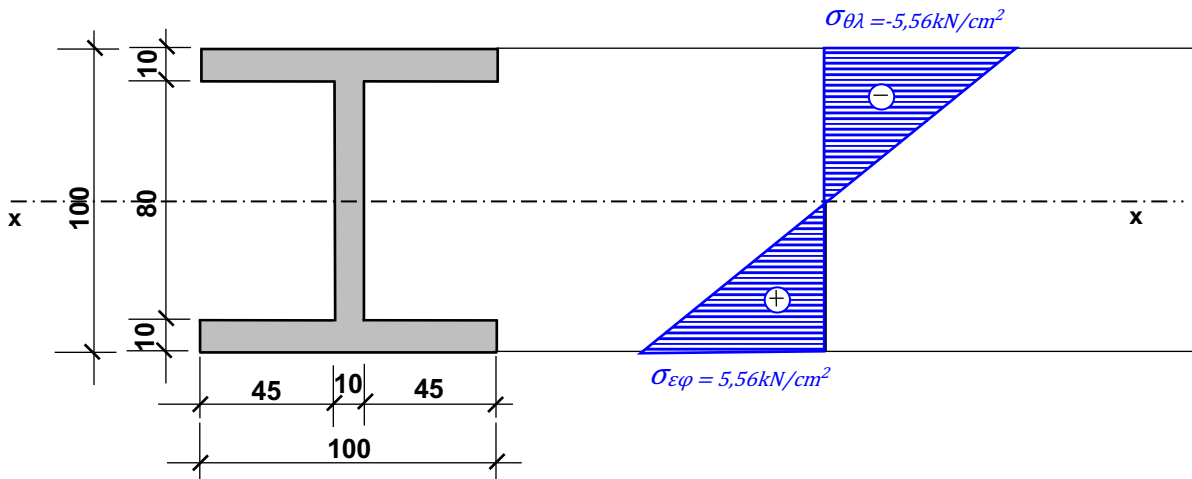
$$I_{ελ} = \frac{300 \cdot (0.7 \cdot 4000)^2}{\pi^2 (10)} = \frac{300 \cdot (2800)^2}{\pi^2 (10)} \Rightarrow$$

$$I_{ελ} = \mathbf{23830742,393 mm^4}$$

5. Δίνεται διατομή αμφιέριστης δοκού όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5α**, που εμφανίζει μέγιστη θετική ροπή κάμψης $M_{\max} = 5000\text{kNm}$ και ροπή αδράνειας $I_{x-x} = 4493333\text{cm}^4$. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.

α) Να υπολογίσετε σε kN/cm^2 , την **μέγιστη τάση εφελκυσμού** και την **μέγιστη τάση θλίψης** που αναπτύσσονται στην διατομή,

β) Στο **Σχήμα 5β**, να σχεδιάσετε το **διάγραμμα κατανομής των τάσεων**.



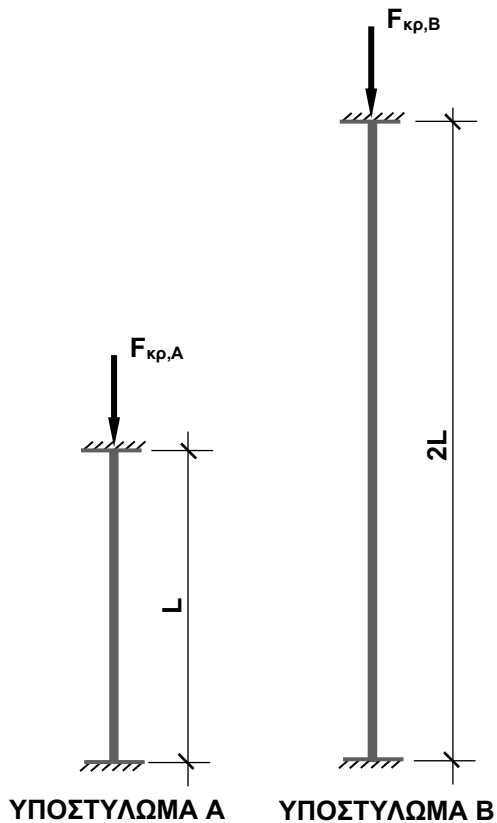
ΣΧΗΜΑ 5α

ΣΧΗΜΑ 5β

Λόγω συμμετρικής διατομής $\sigma_{εφ} = \sigma_{θλ} = \frac{M}{I} \cdot y$

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y = (5000 \cdot 100\text{kNcm}) \cdot \frac{(50\text{cm})}{(4493333\text{cm}^4)} = 5,56\text{kN/cm}^2$$

6. Τα δυο υποστυλώματα A και B στο **Σχήμα 6** έχουν ίδια διατομή, είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό και έχουν τις ίδιες συνθήκες στήριξης. Το υποστυλώμα A έχει πραγματικό μήκος L ενώ το υποστυλώμα B έχει πραγματικό μήκος $2L$.



ΣΧΗΜΑ 6

Να κυκλώσετε την ορθή απάντηση που ισχύει για τη σχέση μεταξύ των κρίσιμων φορτίων λυγισμού, $F_{kr,A}$ και $F_{kr,B}$, για τα δυο υποστυλώματα.

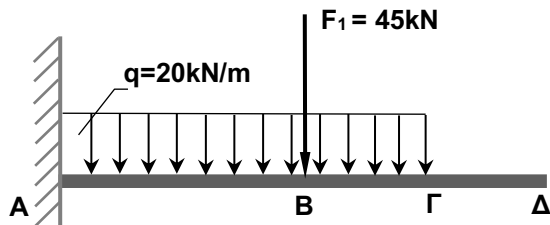
- α) $F_{kr,A} = F_{kr,B}$
- β) $F_{kr,A} = 2F_{kr,B}$
- γ) $F_{kr,A} = F_{kr,B}/2$
- δ) $F_{kr,A} = 4F_{kr,B}$

7. Δοκός πρόβολος φορτίζεται όπως στο **Σχήμα 7**.

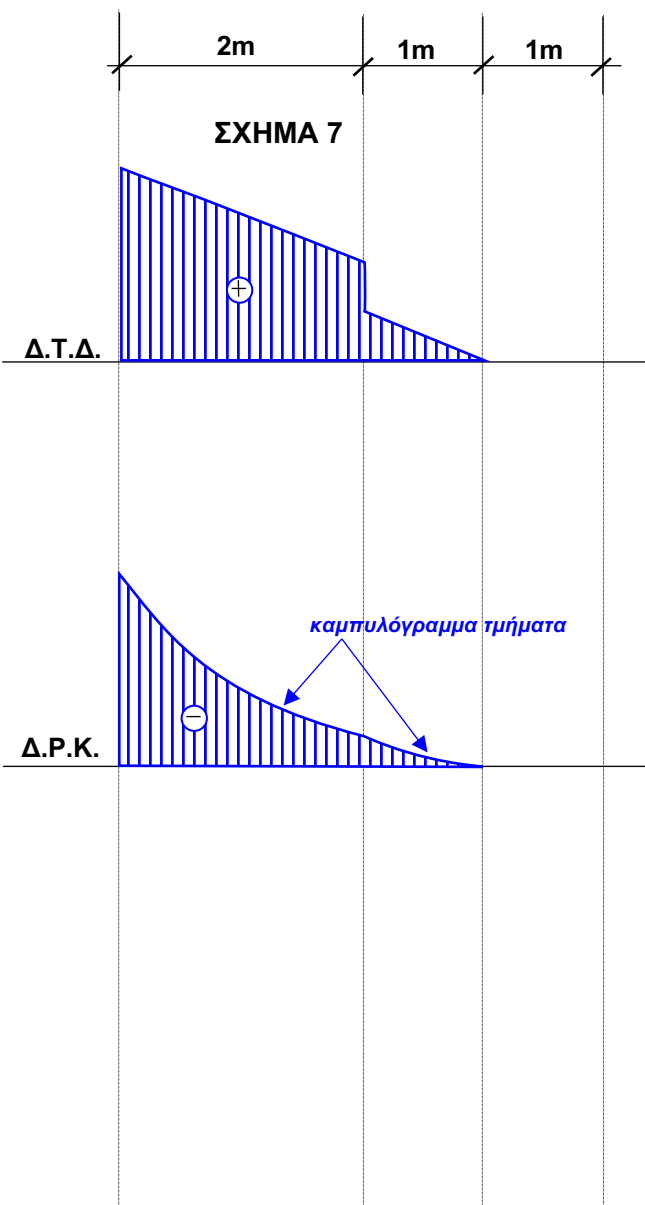
Χωρίς να επιλύσετε την δοκό, να σχεδιάσετε μια πιθανή μορφή των διαγραμμάτων:

α) Τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**),

β) Ροπών κάμψης (**Δ.Ρ.Κ.**). Στο διάγραμμα των ροπών κάμψης να σημειώσετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματα.



ΣΧΗΜΑ 7

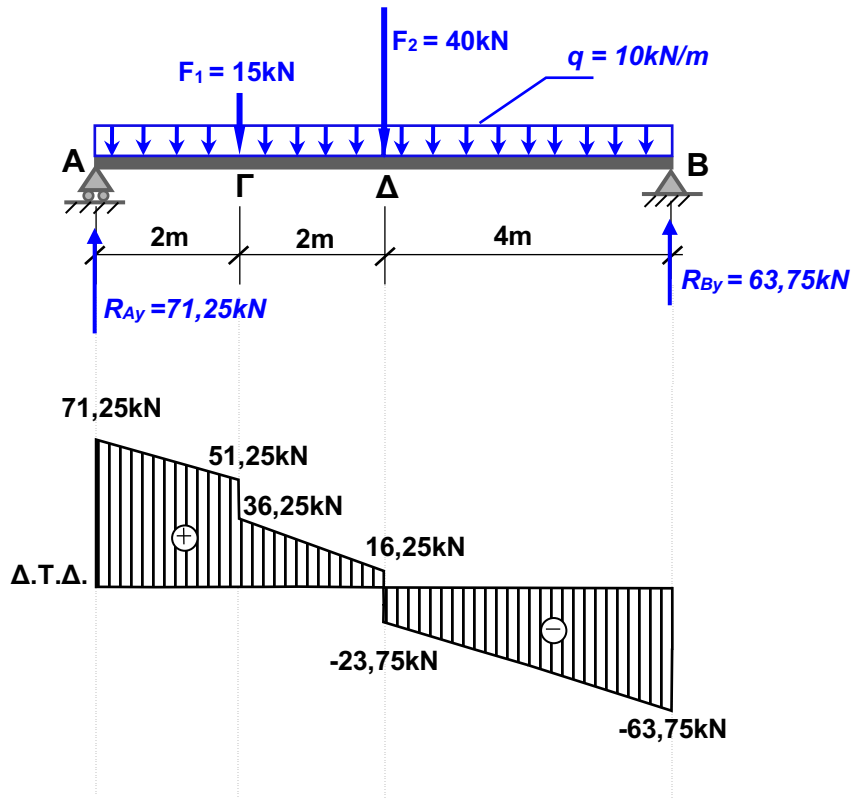


8. Στο **Σχήμα 8** δίνεται μία αμφιέρειστη δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**).

α) Να **σχεδιάσετε** στη δοκό όλες τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και όλα τα εξωτερικά φορτία που την καταπονούν, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**),

β) Να **υπολογίσετε** το μέγεθος όλων των αντιδράσεων και των εξωτερικών φορτίων.

Σημείωση: Οι κεκλιμένες γραμμές στο Δ.Τ.Δ. έχουν την ίδια κλίση.



ΣΧΗΜΑ 8

β) Υπολογισμός του μεγέθους των αντιδράσεων και των εξωτερικών φορτίων
(από διάγραμμα τεμνουσών):

$$R_{Ay} = 71,25 \text{ kN}$$

$$F_1 = 51,25 - 36,25 = 15 \text{ kN}$$

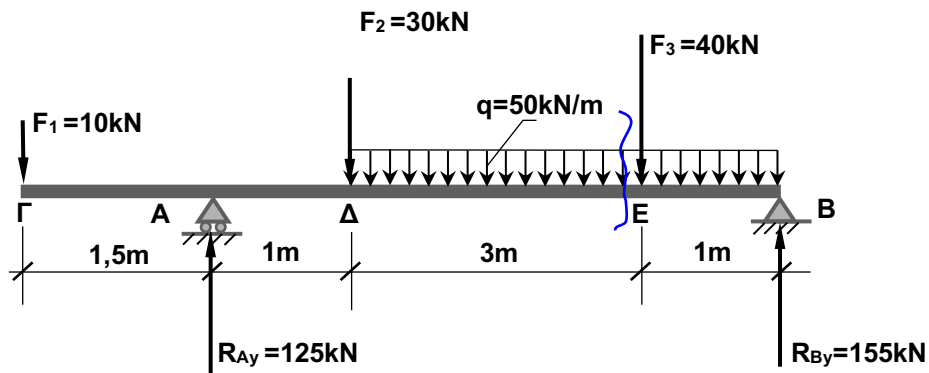
$$F_2 = 16,25 + 23,75 = 40 \text{ kN}$$

$$R_{By} = 63,75 \text{ kN}$$

$$q = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{71,25 - 51,25}{2} = 10 \text{ kN/m} \quad \text{ή} \quad q = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{36,25 - 16,25}{2} = 10 \text{ kN/m}$$

$$\text{ή} \quad q = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{63,75 - 23,75}{4} = 10 \text{ kN/m}$$

9. Για τη μονοπροέχουσα δοκό του Σχήματος 9, να υπολογίσετε την τέμνουσα δύναμη αριστερά του σημείου E ($Q_E^{\alpha\rho}$).



ΣΧΗΜΑ 9

Υπολογισμός τέμνουσας

$$Q_E^{\alpha\rho} = -10 + 125 - 30 - 50 \cdot 3 \Rightarrow Q_E^{\alpha\rho} = -65\text{kN} \text{ (άθροισμα από το } \Gamma \text{ προς } E)$$

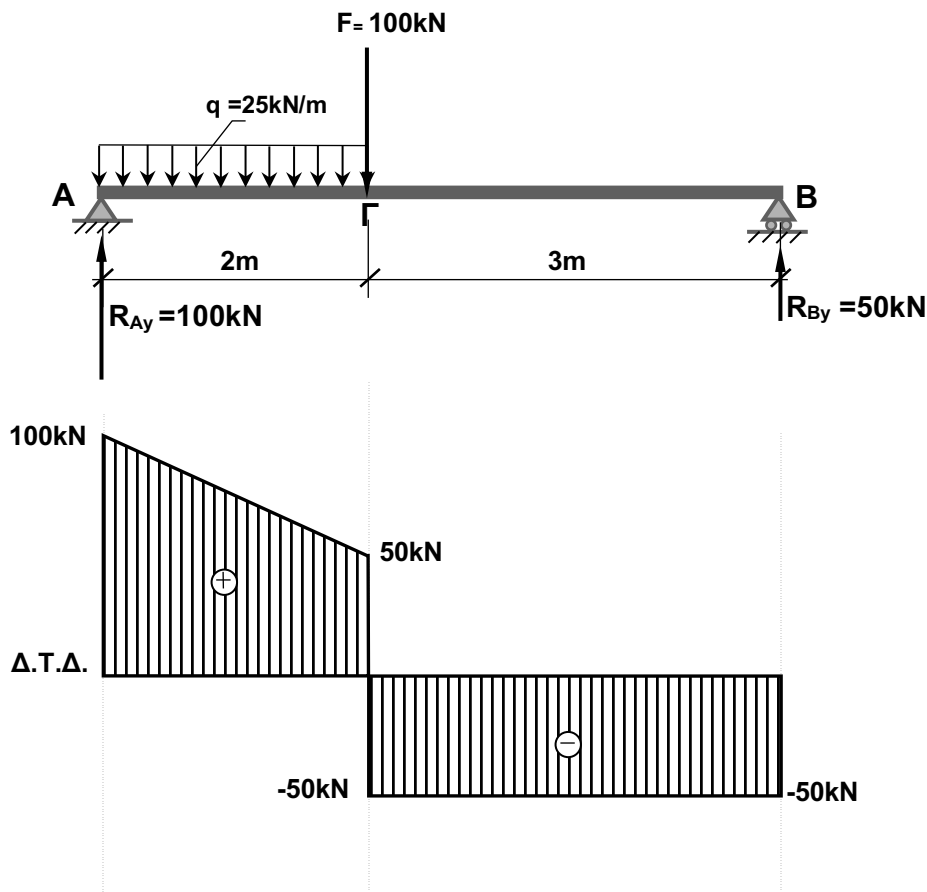
ή

$$Q_E^{\alpha\rho} = -(155 - 50 \cdot 1 - 40) = -155 + 50 \cdot 1 + 40 \Rightarrow Q_E^{\alpha\rho} = -65\text{kN}$$

(άθροισμα από το B προς E)

10. Για την αμφιέρειστη δοκό που φαίνεται στο **Σχήμα 10**, δίνονται οι αντιδράσεις $R_{Ay} = 100\text{kN}$ και $R_{By} = 50\text{kN}$ στις στηρίξεις και το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.).

- α) Να **γράψετε** το σημείο όπου εμφανίζεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης,
 β) Να **υπολογίσετε** την τιμή της μέγιστης ροπής κάμψης M_{max} .



ΣΧΗΜΑ 10

- α) Η μέγιστη ροπή κάμψης εμφανίζεται στο σημείο Γ, (τέμνουσα αλλάζει πρόσημο.)
 β) Τρόπος 1: Μέθοδος εμβαδών

$$M_{max} = M_A + \text{Εμβαδό Δ.Τ.Δ μεταξύ σημείων A και Γ} = 0 + \frac{(100 + 50) \cdot 2}{2}$$

$$\Rightarrow M_{max} = 150\text{kNm}$$

ή

$$M_{max} = -(M_B + \text{Εμβαδό Δ.Τ.Δ μεταξύ σημείων B και Γ}) = -(0 - 50 \cdot 3)$$

$$\Rightarrow M_{max} = 150\text{kNm}$$

Τρόπος 2: (Τομή στο Γ και ισορροπία ροπών του αριστερού τμήματος ως προς το σημείο Γ). Θετικές ροπές κάμψης προκαλούν εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια της δοκού. Ισοδύναμα μπορεί να ληφθεί ισορροπία του δεξιού τμήματος.

$$\sum_{+\cup} M_{\Gamma} = 0 \Rightarrow 100 \cdot 2 - 25 \cdot 2 \cdot 1 - M_{max} = 0 \Rightarrow M_{max} = 150kNm$$

Τρόπος 3: Η τιμή της M_{max} είναι το άθροισμα των ροπών από το Α μέχρι το Γ (δεξιόστροφες θετικές αν αθροίζουμε από το Α στο Γ)

$$M_{max} = 100 \cdot 2 - 25 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow M_{max} = 150kNm$$

ή

Η τιμή της M_{max} είναι το άθροισμα των ροπών από το Β μέχρι το Γ (αριστερόστροφες θετικές αν αθροίζουμε από το Β στο Γ)

$$M_{max} = 50 \cdot 3 \Rightarrow M_{max} = 150kNm$$

**ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

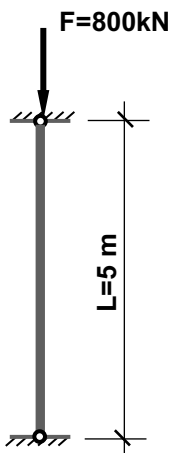
ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από τέσσερις (4) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες. Σύνολο σαράντα (40) μονάδες.

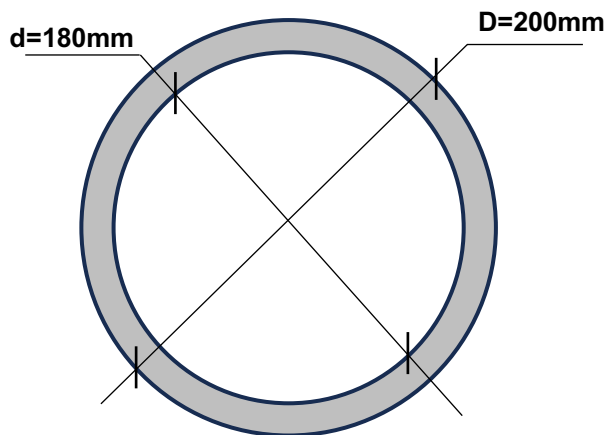
11. Χαλύβδινο υποστύλωμα, κυκλικής κοίλης διατομής με διαστάσεις όπως φαίνεται στο **Σχήμα 11β** σχεδιάστηκε για να μεταφέρει φορτίο **F=800kN** με ασφάλεια, χωρίς να εκδηλώνεται σε αυτό λυγισμός. Το υποστύλωμα έχει πραγματικό μήκος **L=5m** και στηρίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 11α**.

Να **υπολογίσετε** τον συντελεστή ασφαλείας **γ** για τον οποίο σχεδιάστηκε το υποστύλωμα.

Δίνεται: **E = 210 kN/mm²**



ΣΧΗΜΑ 11α



ΣΧΗΜΑ 11β

Ελεύθερο μήκος λυγισμού $\ell = 1 \cdot L = 1 \cdot 5 = 5m = 5000mm$

$$I_{ελ} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi \cdot (200^4 - 180^4)}{64} = 27009842,84mm^4$$

$$F_{κρ} = \frac{\pi^2 \cdot (210) \cdot (27009842,84)}{5000^2} = 2239,24kN$$

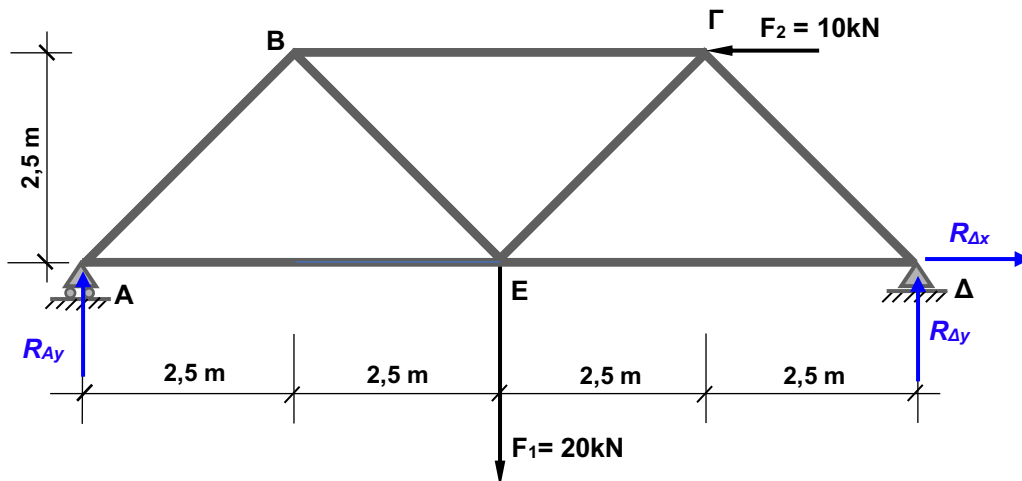
$$\gamma = \frac{F_{κρ}}{F_{επ}} = \frac{2239,24}{800} = 2,80 \Rightarrow \gamma = 2,80 \approx 3$$

12. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 12**.

- α) Να **σχεδιάσετε** όλες τις αντιδράσεις στο σχήμα,
- β) Να **υπολογίσετε** την οριζόντια αντίδραση,
- γ) Να **υπολογίσετε** το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης και να **καθορίσετε** το είδος της καταπόνησης στις ράβδους **AB** και **BE** με τη μέθοδο ανάλυσης – ισορροπίας των κόμβων.

(Να ξεκινήσετε από τον κόμβο A και να συνεχίσετε στον B)

Δίνονται οι κατακόρυφες αντιδράσεις στις στηρίξεις $R_{Ay} = 12,5\text{kN}$ και $R_{\Delta y} = 7,5\text{kN}$.



ΣΧΗΜΑ 12

β) Υπολογισμός οριζόντιας αντίδρασης.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{\Delta x} - F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = 10\text{kN}$$

γ) Υπολογισμός εσωτερικής δύναμης και είδος καταπόνησης των ράβδων AB και BE με την μέθοδο ανάλυσης - ισορροπίας των κόμβων.

Κόμβος A

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - F_{ABy} = 0$$

$$12,5 - F_{AB} \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{12,5}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow F_{AB} = 17,68\text{kN} \text{ Ολιβόμενη}$$

Η F_{AB} είναι θλιβόμενη ράβδος

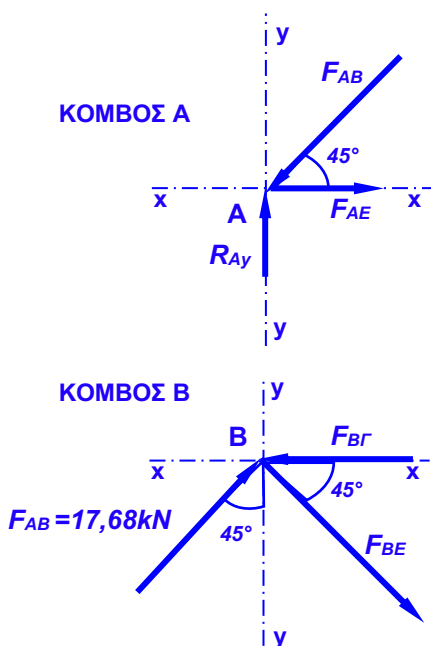
Κόμβος B

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{ABy} - F_{BEy} = 0$$

$$17,68 \cdot \cos 45^\circ - F_{BE} \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow F_{BE} = \frac{17,68 \cdot \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow F_{BE} = 17,68\text{kN} \text{ Εφελκόμενη}$$

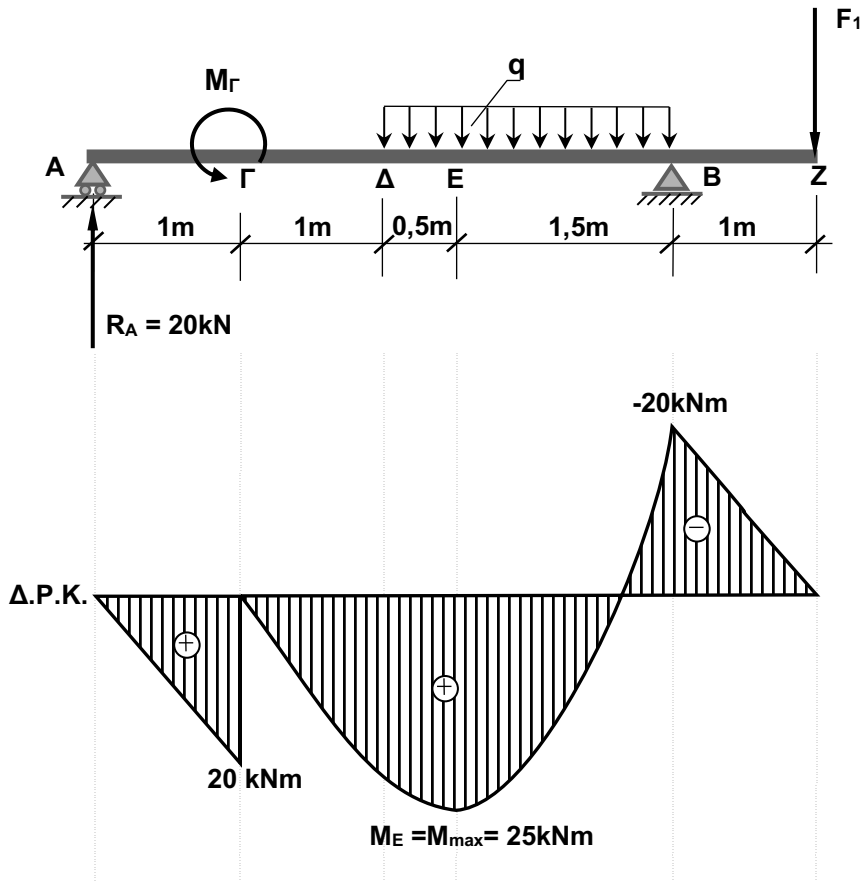
Η F_{BE} είναι εφελκόμενη ράβδος



13. Δίνεται μονοπρόεχουσα δοκός όπως φαίνεται στο **Σχήμα 13**, η αντίδραση στη στήριξη $R_A = 20\text{kN}$ καθώς και το διάγραμμα ροπών κάμψης (**Δ.Ρ.Κ.**).

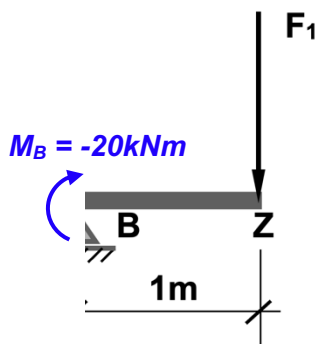
Ζητείται το μέγεθος:

- α) του σημειακού φορτίου F_1 (kN),
- β) της σημειακής ροπής M_Γ (kNm),
- γ) του κατανεμημένου φορτίου q (kN/m).



ΣΧΗΜΑ 13

α) Η δύναμη F_1 μπορεί να υπολογιστεί με τομή δεξιά του σημείου B, απομονώνοντας το δεξί τμήμα που προκύπτει από την τομή και παίρνοντας ισορροπία ροπών ως προς το σημείο B. Στην τομή η ροπή κάμψης σέβεται την σύμβαση προσήμων κατά την οποία θετικές ροπές κάμψης προκαλούν εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια της δοκού.



$$\sum_{+\cup} M_B = 0 \Rightarrow M_B + 1 \cdot F_1 = 0 \Rightarrow (-20) + 1 \cdot F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = 20 \text{ kN}$$

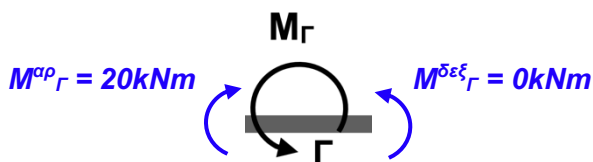
Ισοδύναμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαδικασία αθροίσματος όπου η τιμή της ροπής κάμψης στο σημείο B είναι το άθροισμα όλων το ροπών μέχρι το B (αριστερόστροφες είναι θετικές εάν αθροίζουμε από το Z προς στο A, δηλαδή με κατεύθυνση από δεξιά προς αριστερά σε σχέση με την δοκό)

$$M_B = -1 \cdot F_1 \Rightarrow (-20) = -1 \cdot F_1 \Rightarrow F_1 = 20 \text{ kN}$$

β) Η σημειακή ροπή M_Γ μπορεί να υπολογιστεί με τομές αριστερά και δεξιά του σημείου Γ και απομονώνοντας στην ουσία το σημείο Γ με την συγκεντρωμένη ροπή. Ακολουθως παίρνουμε ισορροπία του σημείου. Στην τομή η ροπή κάμψης σέβεται την σύμβαση προσήμων κατά την οποία θετικές ροπές κάμψης προκαλούν εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια της δοκού.

$$\sum_{+\cup} M_\Gamma = 0 \Rightarrow M_\Gamma^{\alpha\rho} - M_\Gamma - M_\Gamma^{\delta\epsilon\xi} = 0 \Rightarrow 20 - M_\Gamma - 0 = 0 \Rightarrow M_\Gamma = 20 \text{ kNm}$$

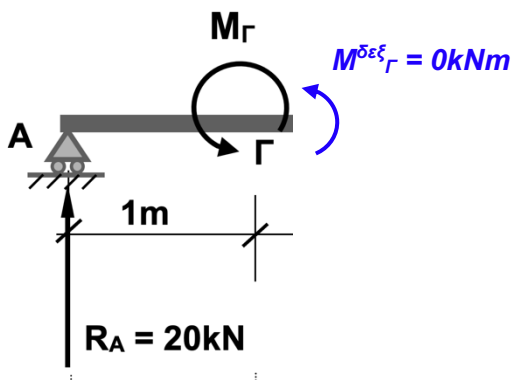
ή απάντηση απευθείας από το διάγραμμα $M_\Gamma=20\text{kNm}$ αφού το άλμα στο Δ.Ρ.Κ ισούται με το μέγεθος της σημειακής ροπής και δίνεται η φορά της.



Ισοδύναμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διαδικασία αθροίσματος όπου η τιμή της ροπής κάμψης δεξιά του σημείου Γ είναι το άθροισμα όλων το ροπών από το A μέχρι το Γ (ως προς Γ). Δεξιόστροφες ροπές είναι θετικές στο άθροισμα, εάν αθροίζουμε από το A προς στο Γ , δηλαδή με κατεύθυνση από αριστερά προς δεξιά σε σχέση με την δοκό.

$$M_\Gamma^{\delta\epsilon\xi} = R_A \cdot 1 - M_\Gamma \Rightarrow 0 = 20 \cdot 1 - M_\Gamma \Rightarrow M_\Gamma = 20 \text{ kNm}$$

Ισοδύναμα η M_Γ μπορεί να υπολογιστεί με τομή δεξιά του σημείου Γ , απομονώνοντας το αριστερό τμήμα που προκύπτει από την τομή και παίρνοντας ισορροπία ροπών ως προς το σημείο Γ . Στην τομή η ροπή κάμψης σέβεται την σύμβαση προσήμων κατά την οποία θετικές ροπές κάμψης προκαλούν εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια της δοκού



$$\sum_{+\cup} M_\Gamma = 0 \Rightarrow -M_\Gamma^{\delta\epsilon\xi} - M_\Gamma + R_A \cdot 1 = 0 \Rightarrow -0 - M_\Gamma + 20 \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_\Gamma = 20 \text{ kNm}$$

γ) Το μέγεθος του q , βάσει των δεδομένων του προβλήματος, μπορεί να υπολογιστεί με πέντε τρόπους.

Τρόπος 1: Με ισορροπία ολόκληρης της δοκού ως προς το σημείο B

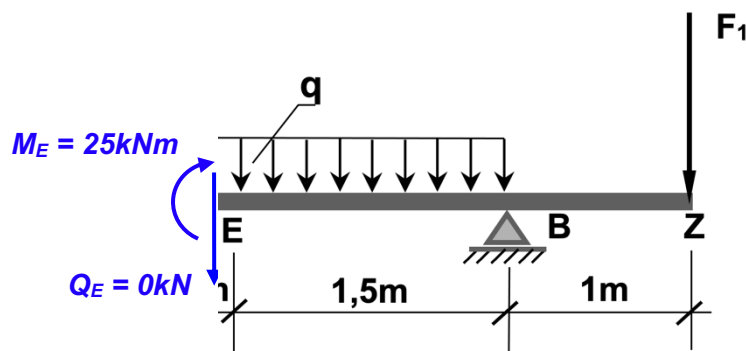
$$\sum_{+\cup} M_B = 0 \Rightarrow R_A \cdot 4 - q \cdot \frac{2^2}{2} - M_G + 1 \cdot F_1 = 0 \Rightarrow 20 \cdot 4 - q \cdot \frac{2^2}{2} - 20 + 1 \cdot 20 = 0$$

$$\Rightarrow q = 40 \text{ kN/m}$$

Τρόπος 2: Μηδενισμός Τέμνουσας στο σημείο E και άθροισμα από το A στο E. Η σύμβαση προσήμων για την τέμνουσα είναι θετικά προς τα πάνω όταν αθροίζουμε από αριστερά προς τα δεξιά.

$$Q_E = 0 \Rightarrow R_A - q \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow 20 - q \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow q = 40 \text{ kN/m}$$

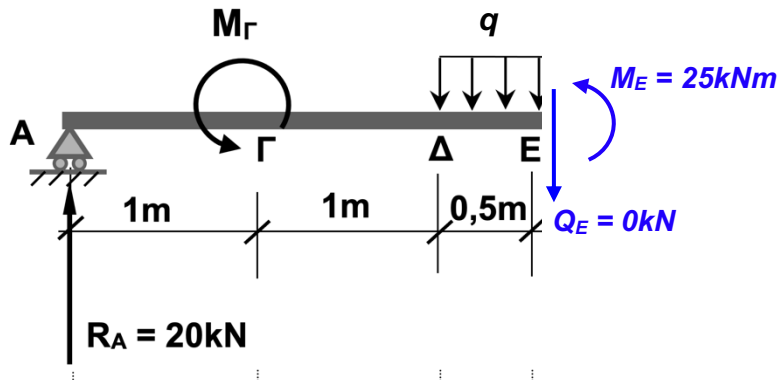
Τρόπος 3: Τομή στο σημείο E και ισορροπία ροπών δεξιού τμήματος ως προς το σημείο B). Αναγνωρίζουμε ότι η τιμή της τέμνουσας στο σημείο E είναι μηδέν και έτσι δεν δημιουργεί ροπή ως προς το B. Στην τομή η ροπή κάμψης σέβεται την σύμβαση προσήμων κατά την οποία θετικές ροπές κάμψης προκαλούν εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια της δοκού.



$$\sum_{+\cup} M_B = 0 \Rightarrow M_E - q \frac{1,5^2}{2} + 1 \cdot F_1 = 0 \Rightarrow 25 - q \frac{1,5^2}{2} + 1 \cdot 20 = 0$$

$$\Rightarrow q = 40 \text{ kN/m}$$

Τρόπος 4: Τομή στο σημείο E και ισορροπία ροπών αριστερού τμήματος ως προς το σημείο A. Αναγνωρίζουμε ότι η τιμή της τέμνουσας στο σημείο E είναι μηδέν και έτσι δεν δημιουργεί ροπή ως προς το A. Στην τομή η ροπή κάμψης σέβεται την σύμβαση προσήμων κατά την οποία θετικές ροπές κάμψης προκαλούν εφελκυσμό στην κάτω επιφάνεια της δοκού.



$$\sum_{+\cup} M_A = 0 \Rightarrow -M_E - M_G + (0,5 \cdot q) \cdot (2,25) = 0 \Rightarrow -25 - 20 + (0,5 \cdot q) \cdot (2,25) = 0$$

$$\Rightarrow q = 40 \text{ kN/m}$$

Εναλλακτικά μπορεί να λυθεί το σύστημα και με ισορροπία ροπών ως προς το E αφού η αντίδραση στο A δίνεται.

$$\sum_{+\cup} M_E = 0 \Rightarrow -M_E - M_G + R_A \cdot (2,5) - (0,5 \cdot q) \cdot (0,5) = 0$$

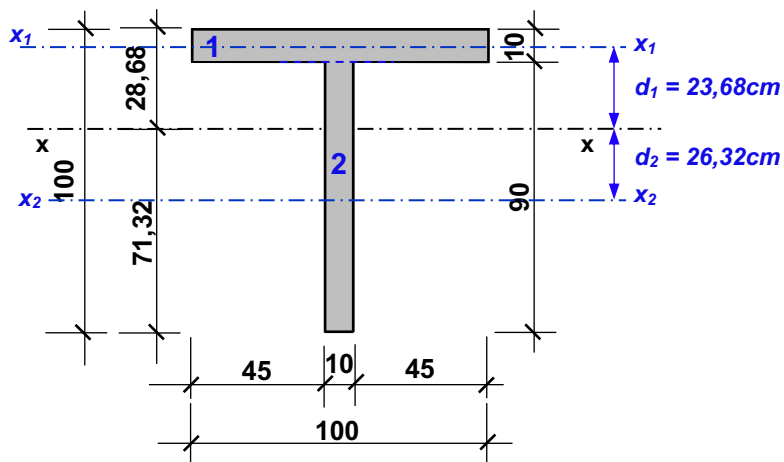
$$\Rightarrow -25 - 20 + 20 \cdot (2,5) - (0,5 \cdot q) \cdot \frac{0,5}{2} = 0 \Rightarrow q = 40 \text{ kN/m}$$

Τρόπος 5: Η τιμή της ροπής κάμψης στο σημείο E είναι το άθροισμα όλων το ροπών από το A μέχρι το E (ως προς E). Δεξιόστροφες ροπές είναι θετικές στο άθροισμα, όταν αθροίζουμε από το A προς στο E, δηλαδή με κατεύθυνση από αριστερά προς δεξιά σε σχέση με την δοκό)

$$M_E = R_A \cdot 2,5 - M_G - (0,5 \cdot q) \cdot \frac{0,5}{2} \Rightarrow 25 = 20 \cdot 2,5 - 20 - (0,5 \cdot q) \cdot \frac{0,5}{2}$$

$$\Rightarrow q = 40 \text{ kN/m}$$

14. Να υπολογιστεί η ακτίνα αδράνειας i_{x-x} ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$ της σύνθετης διατομής που δίνεται στο **Σχήμα 14**. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.



ΣΧΗΜΑ 14

Υπολογισμός ροπής αδράνειας I_{x-x}

$$\begin{aligned}
 I_{x-x} &= (I_{1,x_1-x_1} + A_1 \cdot d_1^2) + (I_{2,x_2-x_2} + A_2 \cdot d_2^2) = \\
 &= \left(\frac{100 \cdot 10^3}{12} + 100 \cdot 10 \cdot 23,68^2 \right) + \left(\frac{10 \cdot 90^3}{12} + 10 \cdot 90 \cdot 26,32^2 \right) \Rightarrow \\
 I_{x-x} &= (8333,33 + 560742,4) + (607500 + 623468,16) = \mathbf{1800043,89 \text{ cm}^4}
 \end{aligned}$$

Υπολογισμός ακτίνας αδράνειας i_{x-x}

$$i_{x-x} = \sqrt{\frac{I_{x-x}}{A}} = \sqrt{\frac{1800043,89}{1900}} = \mathbf{30,78 \text{ cm}}$$

$$\text{Όπου } A = A_1 + A_2 = 100 \cdot 10 + 10 \cdot 90 = \mathbf{1900 \text{ cm}^2}$$

ΤΕΛΟΣ Β΄ ΜΕΡΟΥΣ

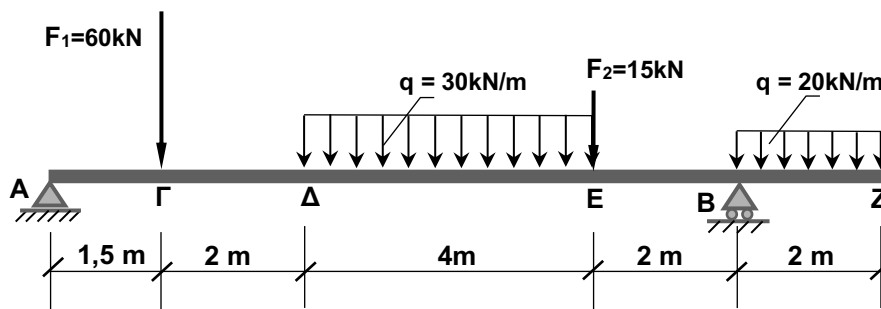
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΜΕΡΟΣ Γ': Αποτελείται από μία (1) άσκηση.

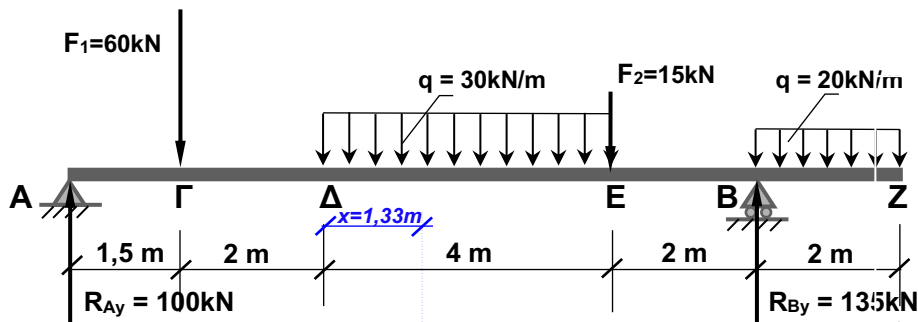
Η άσκηση βαθμολογείται με είκοσι (20) μονάδες.

15. Μονοπρόεχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 15**. Δίνονται οι κατακόρυφες αντιδράσεις στις στηρίξεις ως $R_{Ay} = 100\text{kN}$ και $R_{By} = 135\text{kN}$.

- α) Να **υπολογίσετε** τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A, B, Γ, Δ, E και Z**,
- β) Να **υπολογίσετε** την απόσταση (x), από το σημείο Δ, του μηδενισμού της τέμνουσας δύναμης Q , όπου αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης M_{\max} ,
- γ) Να **υπολογίσετε** το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{\max} ,
- δ) Να **σχεδιάσετε** τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων **Q (Δ.Τ.Δ.)** και των ροπών κάμψης **M (Δ.Ρ.Κ.)** και να **αναγράψετε** τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A, B, Γ, Δ, E και Z**, καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης M_{\max} . Να σημειώσετε στο **Δ.Ρ.Κ.** τα ευθύγραμμα και καμπυλόγραμμα τμήματά του.



ΣΧΗΜΑ 15



α) Υπολογισμός τεμνουσών δυνάμεων Δ.Τ.Δ.

$$Q_A^{\alpha\rho} = 0kN$$

$$Q_A^{\delta\varepsilon\xi} = 100kN$$

$$Q_\Gamma^{\alpha\rho} = 100kN$$

$$Q_\Gamma^{\delta\varepsilon\xi} = Q_\Gamma^{\alpha\rho} - 60 = 40kN$$

$$Q_\Delta = Q_\Gamma^{\delta\varepsilon\xi} = 40kN$$

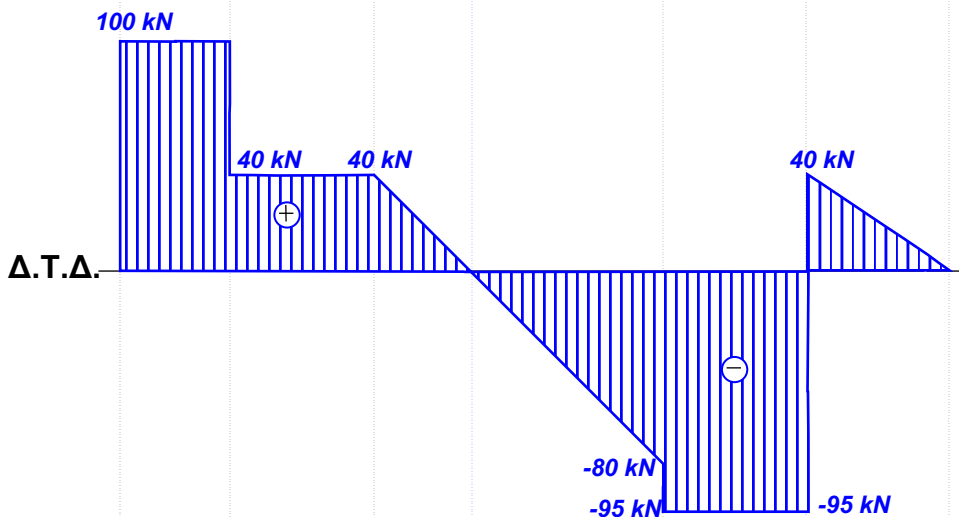
$$Q_E^{\alpha\rho} = Q_\Delta^{\alpha\rho} - 30 \cdot 4 = -80kN$$

$$Q_E^{\delta\varepsilon\xi} = Q_E^{\alpha\rho} - 15 = -95kN$$

$$Q_B^{\alpha\rho} = Q_E^{\delta\varepsilon\xi} = -95kN$$

$$Q_B^{\delta\varepsilon\xi} = Q_B^{\alpha\rho} + R_{B_Y} = 40kN$$

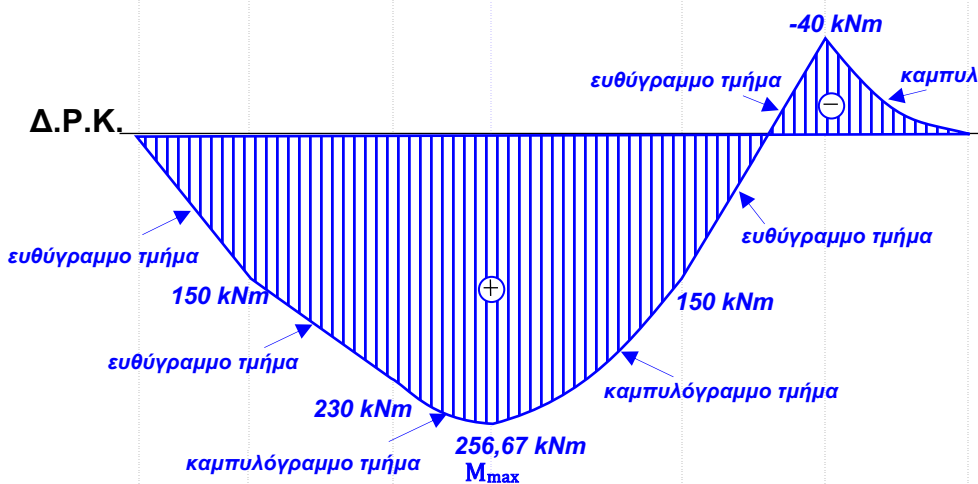
$$Q_Z = 0kN$$



Υπολογισμός ροπών κάμψης Δ.Ρ.Κ.

$$M_A^{x=0} = 0kNm$$

$$M_\Gamma^{x=1,5} = 100 \cdot 1,5 = 150kNm$$



$$M_\Delta^{x=3,5} = 100 \cdot 3,5 - 60 \cdot 2 = 230kNm$$

$$M_E^{x=7,5} = 100 \cdot 7,5 - 60 \cdot 6 - 30 \cdot 4 \cdot 2 = 150kNm$$

$$M_B^{x=9,5} = 100 \cdot 9,5 - 60 \cdot 8 - 30 \cdot 4 \cdot (2 + 2) - 15 \cdot 2 = -40kNm$$

$$\eta \quad M_B^{x=2} = -(20 \cdot 2) = -40kNm$$

$$M_Z^{x=11,5} = 100 \cdot 11,5 - 60 \cdot 10 - 30 \cdot 4 \cdot 6 - 15 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + 13,5 \cdot 2 = 0kNm$$

β) Υπολογισμός θέσης x μέγιστης ροπής στο άνοιγμα από το σημείο Δ.

$$Q_x = 0 \Rightarrow 100 - 60 - 30 \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$x = 1,33m$ από το σημείο Δ.

γ) Υπολογισμός μέγιστης ροπής M_{max} ($x=1,33m$)

$$M_{max} = R_A \cdot (1,5 + 2 + x) - 60 \cdot (2 + x) - 30 \cdot x^2 / 2 = 100 \cdot 4,83 - 60 \cdot 3,33 - 26,53 = 256,67kNm$$