

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ**

**ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΚΑΙ
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

20 25 - 20 26

Β' ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΣΕΙΡΑ Α΄

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : Παρασκευή, 15 Μαΐου 2026

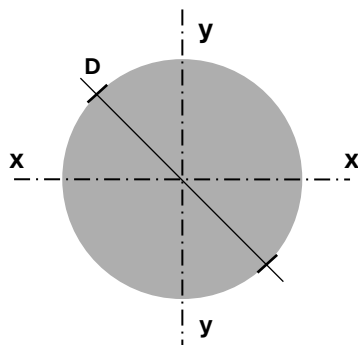
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ : thdm201

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Περιλαμβάνει οχτώ (8) ερωτήσεις και κάθε ερώτηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες. Σύνολο μονάδων σαράντα (40).

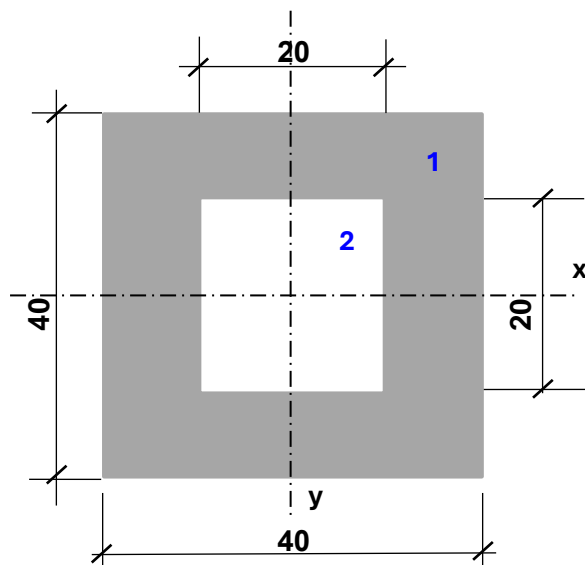
1. Να υπογραμμίσετε τη σωστή απάντηση στην πιο κάτω πρόταση:
 Στην κυκλική διατομή του **Σχήματος 1**, εάν διπλασιάσουμε την διάμετρο D, τότε η ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό της άξονα y-y θα είναι
 την ροπή αδράνειας προς τον κεντροβαρικό άξονα x-x :



ΣΧΗΜΑ 1

- α) διπλάσια από
 β) οχταπλάσια από
γ) ίδια με
 δ) μισή

2. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης W_x της σύνθετης διατομής που δίνεται στο πιο κάτω **Σχήμα 2**. Οι διαστάσεις είναι σε cm.

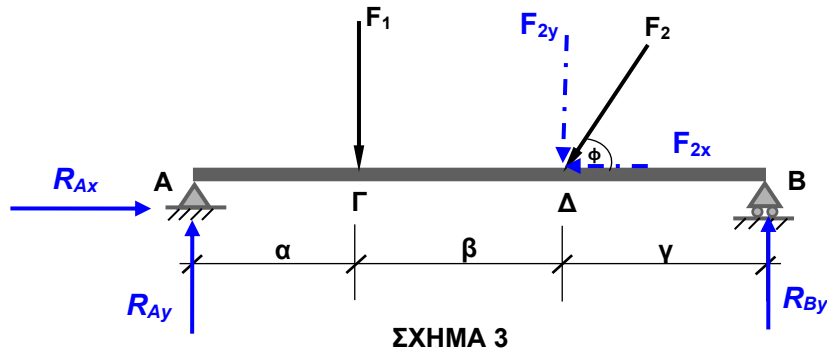


ΣΧΗΜΑ 2

$$I_x = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{40^4}{12} - \frac{20^4}{12} = 200000 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{200000}{20} = 10000 \text{ cm}^3$$

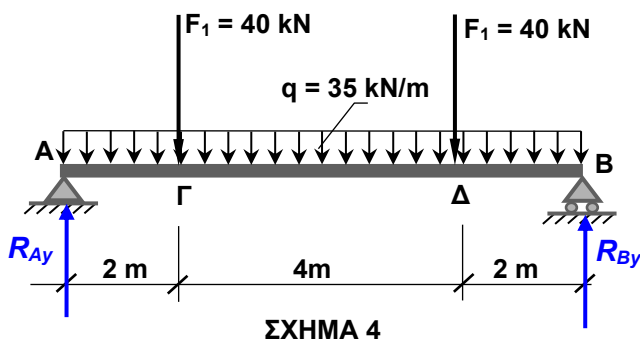
3. Για την αμφιέρειστη δοκό που φαίνεται στο πιο κάτω **Σχήμα 3**,
 (α) να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις A και B
 (β) να γράψετε την εξίσωση ισορροπίας στην οριζόντια κατεύθυνση ($\Sigma F_x=0$) και την εξίσωση ισορροπίας στην κατακόρυφη κατεύθυνση ($\Sigma F_y=0$).



$$\beta) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} - F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\phi = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} - F_2 \cdot \eta\mu\phi - F_1 = 0$$

4. Δίνεται αμφιέρειστη δοκός όπως στο **Σχήμα 4**.
 α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
 β) Να υπολογίσετε τη ροπή κάμψης (M_Δ) στο χαρακτηριστικό σημείο **Δ**.



$$\alpha) \text{ Λόγω Συμμετρίας } R_{Ay} = R_{By}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} - 40 - 40 - 35 \cdot 8 = 0$$

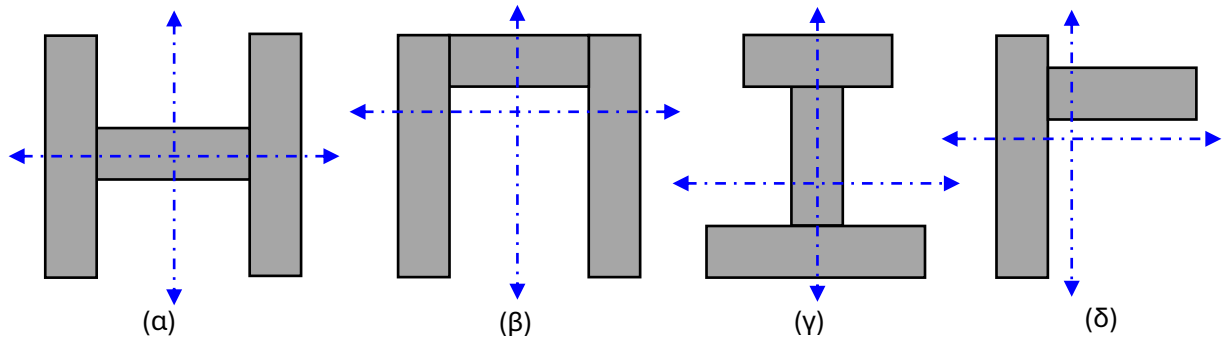
$$\Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 360$$

$$\Rightarrow R_{Ay} = R_{By} = \frac{360}{2} = 180 \text{ kN}$$

$$\beta) M_\Delta = R_{Ay} \cdot 6 - F_1 \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 3$$

$$\Rightarrow 180 \cdot 6 - 40 \cdot 4 - 35 \cdot 6 \cdot 3 = 290 \text{ kNm}$$

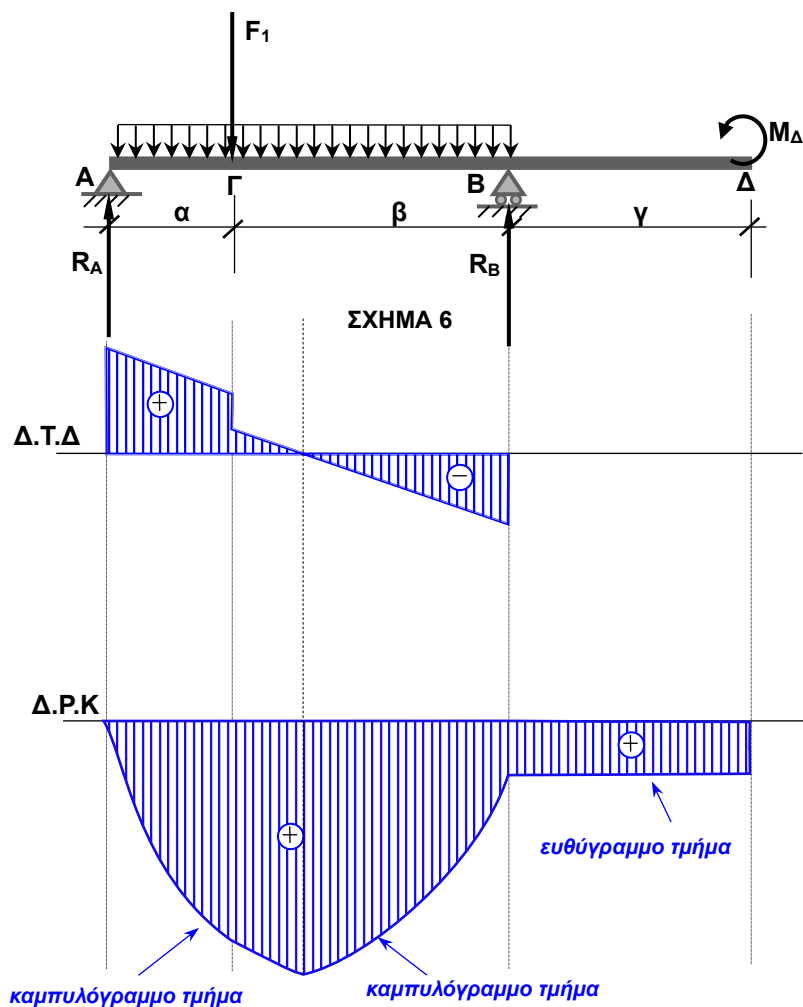
5. Στις διατομές του **Σχήματος 5** να σχεδιάσετε τη θέση όπου βρίσκονται (περίπου) οι κεντροβαρικοί άξονες $x-x$ και $y-y$.



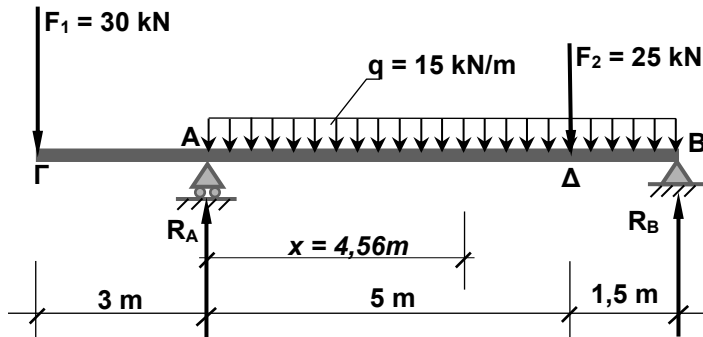
ΣΧΗΜΑ 5

6. Σε προέχουσα δοκό που φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6**, σας δίνεται ότι η μέγιστη θετική ροπή κάμψης M_{max} είναι μεταξύ του Γ και του B . Να σχεδιάσετε μια πιθανή μορφή των διαγραμμάτων, των τεμνουσών δυνάμεων Q ($\Delta.T.\Delta$) και των ροπών κάμψης M ($\Delta.P.K$) και να σημειώσετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματά τους.

(δ)



7. Σε δοκό που φορτίζεται όπως στο **Σχήμα 7**, εμφανίζεται μέγιστη θετική ροπή κάμψης M_{max} σε απόσταση $x=4,56m$ από το σημείο A. Χρησιμοποιώντας αυτό το δεδομένο να βρείτε την αντίδραση R_A .

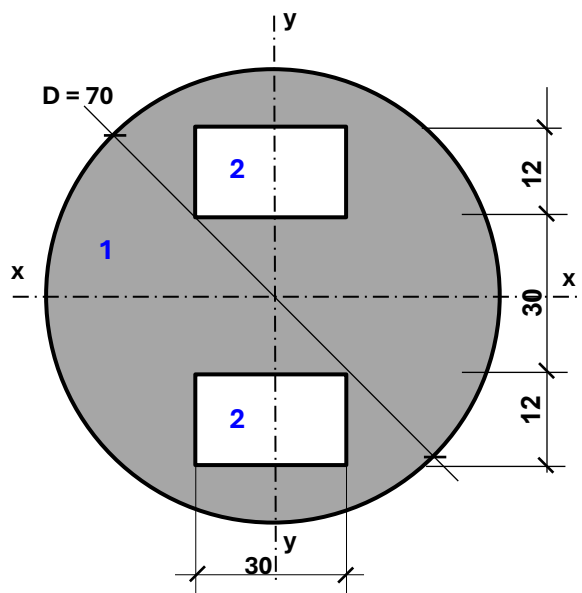


ΣΧΗΜΑ 7

Για να έχουμε μέγιστη ροπή κάμψης M_{max} σε απόσταση $x=4,56m$ από το σημείο A, η τέμνουσα δύναμη (Q_x) είναι ίση με μηδέν.

$$Q_x = 0 \Rightarrow -F_1 + R_A - q \cdot x = 0 \Rightarrow R_A = \underline{98,4kN}$$

8. Να υπολογίσετε τη Ροπή αδράνειας I_{x-x} της σύνθετης διατομής του **Σχήματος 8**, ως προς τον κεντροβαρικό άξονα x-x. Οι διαστάσεις είναι σε cm.



ΣΧΗΜΑ 8

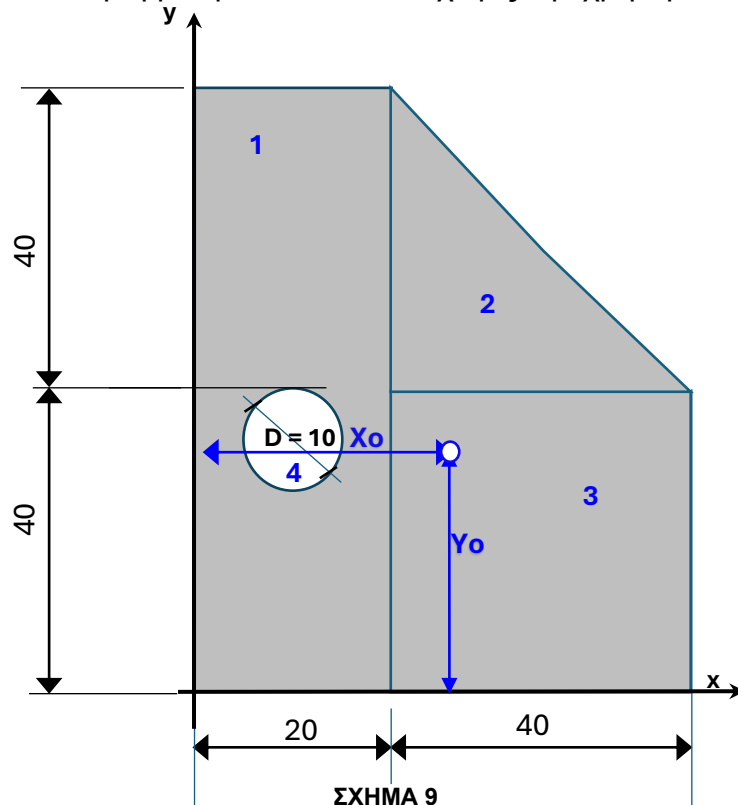
$$\begin{aligned} I_{x-x} &= I_{1x} - 2 \cdot (I_{2x} + A_{2x} \cdot d^2) \\ &= \frac{\pi \cdot 70^4}{64} - 2 \cdot \left(\frac{30 \cdot 12^3}{12} + 30 \cdot 12 \cdot 21^2 \right) \\ &= 1178588,12 - 326160 \\ &= \underline{852428,12cm^4} \end{aligned}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α´
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β´

ΜΕΡΟΣ Β΄: Περιλαμβάνει τέσσερις (4) ερωτήσεις και κάθε ερώτηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες. Σύνολο μονάδων σαράντα (40).

9. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες X_0 και Y_0 και να σημειώσετε στο σχέδιο τη θέση του κέντρου επιφάνειας της διατομής του πιο κάτω σχήματος. Το τμήμα του κύκλου με διάμετρο $D=10\text{cm}$ είναι κενό. Οι διαστάσεις είναι σε εκατοστόμετρα cm .

Η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς την χρήση του πίνακα.



$$X_0 = \frac{\sum \alpha_i \cdot x_i}{A} = \frac{105878,6}{3921,46} \Rightarrow$$

$$X_0 = 27\text{cm}$$

$$Y_0 = \frac{\sum \alpha_i \cdot y_i}{A} = \frac{135915,1}{3921,46} \Rightarrow$$

$$Y_0 = 34,66\text{cm}$$

Κ.β Τριγώνου

$$x = y = \frac{1}{3} \cdot 40 = 13,33\text{cm}$$

Σχήμα	Εμβαδόν α_i	Απόσταση x_i	Απόσταση y_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i \cdot y_i$
1	$80 \cdot 20 = 1600$	10	40	16000	64000
2	$\frac{40 \cdot 40}{2} = 800$	33,33	53,33	26664	42664
3	$40 \cdot 40 = 1600$	40	20	64000	32000
4	$-\pi \cdot 5^2 = -78,54$	10	35	-785,4	-2748,9
Σύνολο	A= 3921,46			$\sum A_i \cdot x_i =$ 105878,6	$\sum A_i \cdot y_i =$ 135915,1

Χωρίς τη χρήση του πίνακα: $A = a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 3921,46\text{cm}^2$

$$X_0 = \frac{\sum \alpha_i \cdot x_i}{A} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 - \alpha_4 \cdot x_4}{A} = 27 \text{ cm}$$

$$Y_0 = \frac{\sum \alpha_i \cdot y_i}{A} = \frac{\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 + \alpha_3 \cdot y_3 - \alpha_4 \cdot y_4}{A} = 34,66 \text{ cm}$$

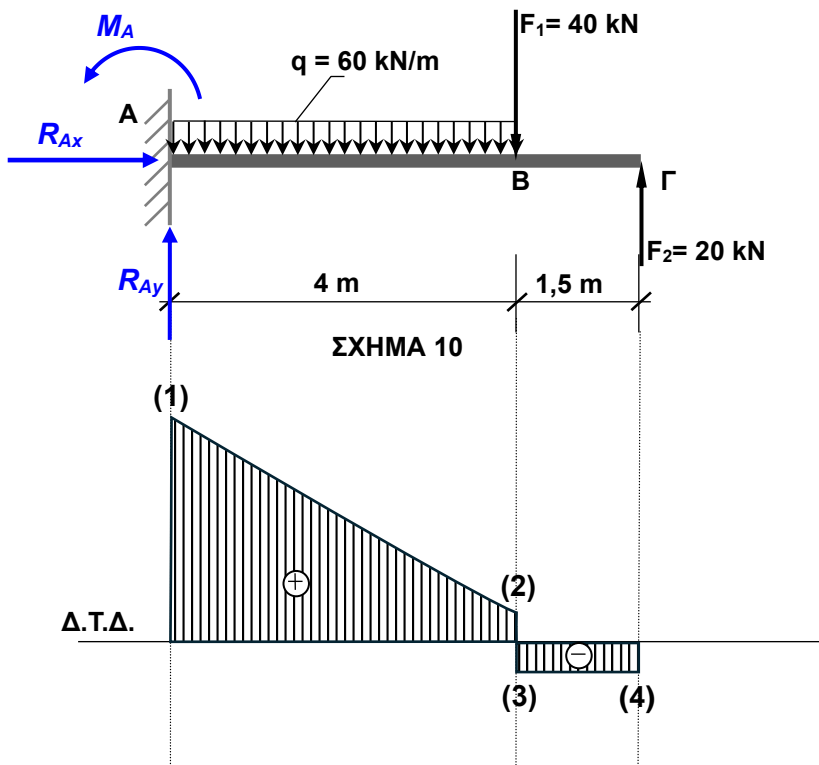
10. Στο **Σχήμα 10**, δίνεται δοκός πρόβολος με τα φορτία της και η σχηματική μορφή του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ).

(α) Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στη στηρίξη.

(β) Να υπολογίσετε το μέγεθος της κατακόρυφης αντίδρασης R_A .

(γ) Να υπολογίσετε και να αναγράψετε στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων τις τιμές των τεμνουσών στα σημεία (1), (2), (3), (4)

(δ) Να υπολογίσετε την ροπή κάμψης M_A που αναπτύσσεται στη στήριξη του προβόλου.



$$(\beta) \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 60 \cdot 4 - 40 + 20 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 260 \text{ kN}$$

(γ) Υπολογισμός τεμνουσών δυνάμεων Δ.Τ.Δ.

$$Q_1 = R_{Ay} = 260 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 260 - 60 \cdot 4 = 20 \text{ kN}$$

$$Q_3 = 20 - 40 = -20 \text{ kN}$$

$$Q_4 = Q_3 = -20 \text{ kN}$$

(δ) Υπολογισμός Ροπής κάμψης M_A .

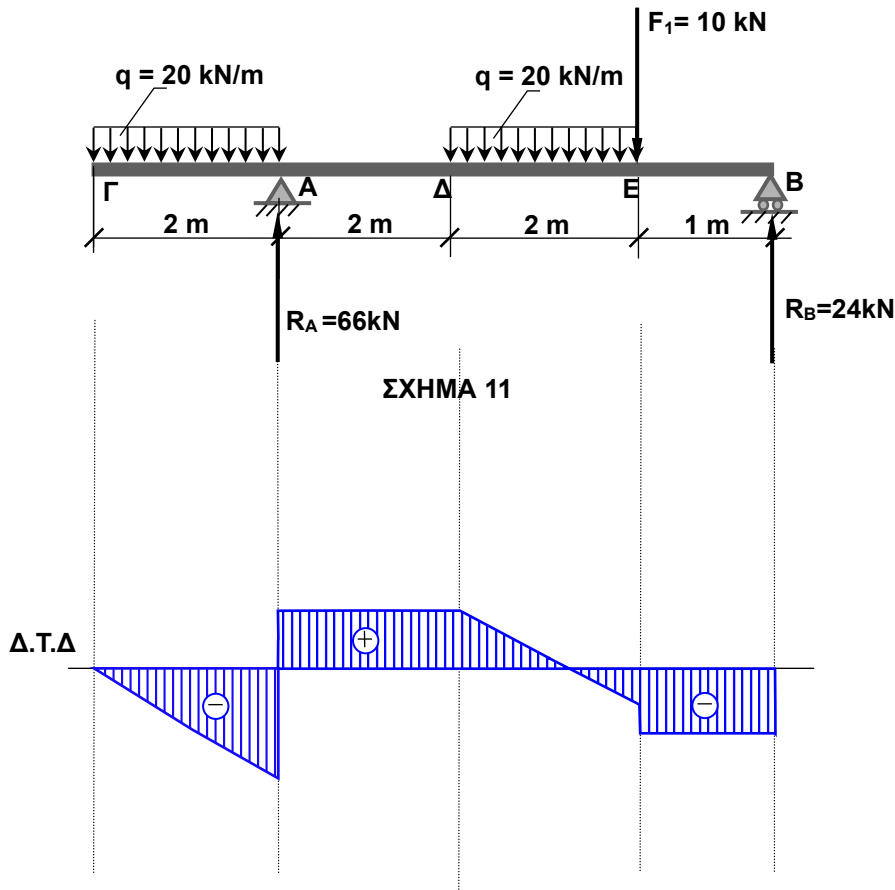
$$-M_A + q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + F_1 \cdot 4 - F_2 \cdot (5,5) \Rightarrow M_A = 530 \text{ kNm}$$

11. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 11**.

(α) Να υπολογίσετε την τέμνουσα δύναμη δεξιά του σημείου **E** ($Q_E^{\delta\epsilon\epsilon}$).

(β) Να υπολογίσετε την ροπή του σημείου **E** (M_E).

(γ) Να σχεδιάσετε μια πιθανή μορφή του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων **Q** ($\Delta.T.\Delta$), σας δίνετε ότι η μέγιστη θετική ροπή κάμψης **Mmax** είναι μεταξύ του Δ και του E.



(α) Υπολογισμός $Q_E^{\delta\epsilon\epsilon}$

$$Q_E^{\delta\epsilon\epsilon} = -20 \cdot 2 + R_A y - 20 \cdot 2 - F_1 = -24 \text{ kN}$$

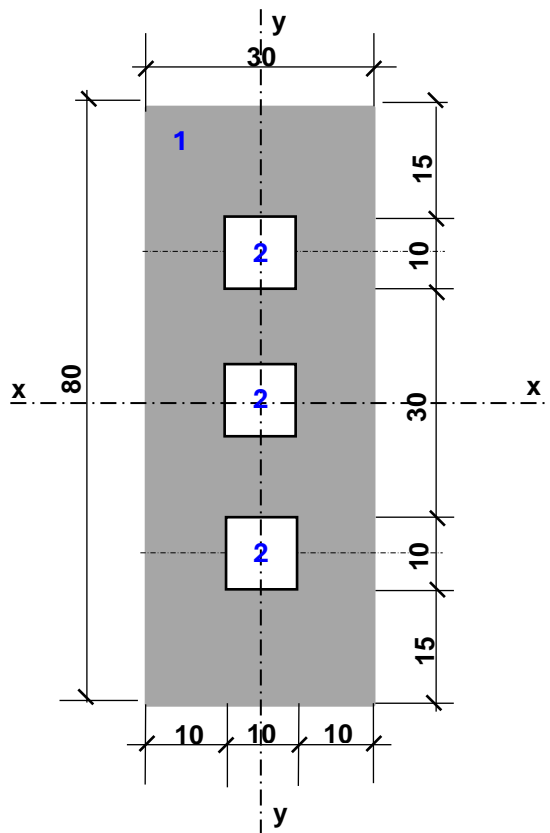
(β) Υπολογισμός M_E

$$M_E = -(-R_B y \cdot 1) = 24 \text{ kNm}$$

ή

$$M_E = -20 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2 + 2\right) + R_A y \cdot (2 + 2) - 20 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2}\right) = 24 \text{ kNm}$$

12. Να υπολογίσετε τη ροπή αντίστασης W_y , ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $y-y$ της σύνθετης διατομής του Σχήματος 12. Οι διαστάσεις είναι σε cm.



ΣΧΗΜΑ 12

$$W_y = \frac{I_y}{x}$$

$$I_y = I_{y1} - 3 \cdot (I_{y2}) = \frac{h_1 b_1^3}{12} - 3 \cdot \left(\frac{h_2 b_2^3}{12} \right) = \frac{80 \cdot 30^3}{12} - 3 \cdot \left(\frac{10 \cdot 10^3}{12} \right)$$

$$= 180000 - 2500 = 177500 \text{ cm}^4$$

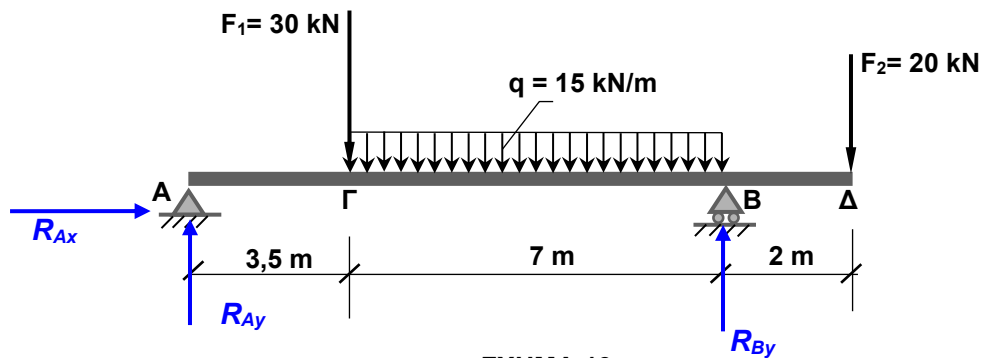
$$W_y = \frac{I_y}{x} = \frac{177500}{15} = 11833,33 \text{ cm}^3$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β´
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Γ´

ΜΕΡΟΣ Γ΄: Περιλαμβάνει μία (1) άσκηση η οποία βαθμολογείται με είκοσι (20) μονάδες.

13. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 13**:

- α) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- β) Να κάνετε επαλήθευση της κατακόρυφης ισορροπίας **$\Sigma F_y = 0$** .
- γ) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A, B, Γ** και **Δ**.
- δ) Να υπολογίσετε την απόσταση (**x**) του σημείου μηδενισμού της τέμνουσας δύναμης Q από το σημείο **Γ**.
- ε) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **Mmax**.
- ζ) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**) και των ροπών κάμψης (**Δ.Ρ.Κ.**)
 - (i) να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία A, B, Γ και Δ.
 - (ii) να αναγράψετε στο (Δ.Ρ.Κ.) τα ευθύγραμμα και καμπυλόγραμμα τμήματα.



$$\alpha) \Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = \underline{0 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 30 \cdot 3,5 + 15 \cdot 7 \cdot 7 - R_{By} \cdot 10,5 + 20 \cdot 12,5 = 0 \Rightarrow 10,5 R_{By} = 1090 \Rightarrow$$

$$R_{By} = \underline{103,81 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_{Ay} \cdot 10,5 - 30 \cdot 7 - 15 \cdot 7 \cdot 3,5 + 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 10,5 R_{Ay} = 537,5 \Rightarrow$$

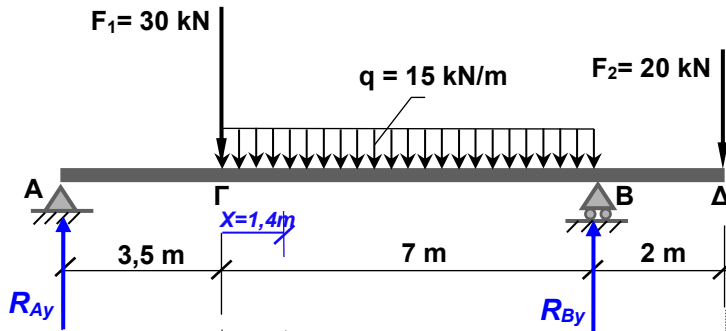
$$R_{Ay} = \underline{51,19 \text{ kN}}$$

Έλεγχος :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 30 - 15 \cdot 7 - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$51,19 + 103,81 - 30 - 15 \cdot 7 - 20 = 0 \Rightarrow 0=0$$



β) Υπολογισμός τεμνουσών δυνάμεων Δ.Τ.Δ.

$$Q_A^{\alpha\rho} = 0 \text{ kN}$$

$$Q_A^{\delta\varepsilon\xi} = 51,19 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\alpha\rho} = 51,19 \text{ kN}$$

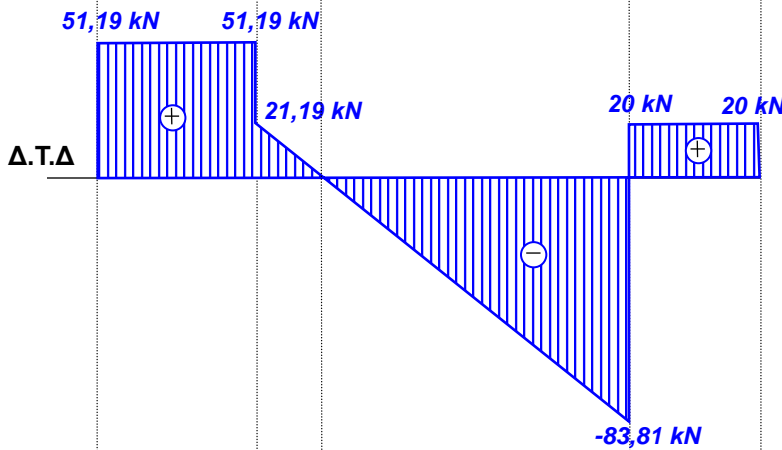
$$Q_{\Gamma}^{\delta\varepsilon\xi} = Q_{\Gamma}^{\alpha\rho} - 30 = 21,19 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\alpha\rho} = Q_{\Gamma}^{\delta\varepsilon\xi} - 15 \cdot 7 = -83,81 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\delta\varepsilon\xi} = Q_B^{\alpha\rho} + 103,81 = 20 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\alpha\rho} = 20 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\delta\varepsilon\xi} = Q_{\Delta}^{\alpha\rho} - 20 = 0 \text{ kN}$$



γ) Υπολογισμός ροπών κάμψης Δ.Ρ.Κ.

$$M_A^{x=0} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma}^{x=3,5} = 51,19 \cdot 3,5 = 179,17 \text{ kNm}$$

$$M_B^{x=10,5} = 51,19 \cdot 10,5 - 30 \cdot 7 - 15 \cdot 7 \cdot 3,5 = -40 \text{ kNm}$$

ή

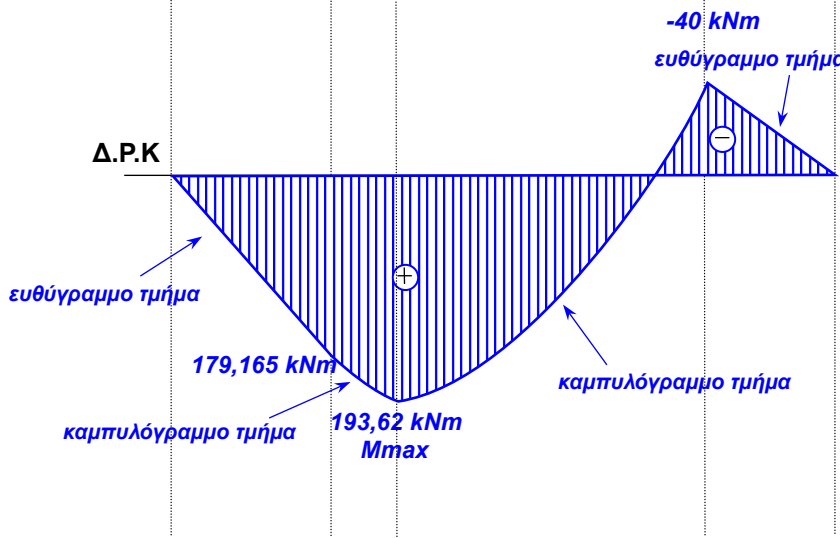
$$M_B^{x=2} = -(20 \cdot 2) = -40 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta}^{x=12,5} = 51,19 \cdot 12,5 - 30 \cdot 9 - 15 \cdot 7 \cdot 5,5 + 103,81 \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$$

δ) Υπολογισμός θέσης X μέγιστης ροπής στο άνοιγμα από το σημείο Γ.

$$Q_x = 0 \Rightarrow 51,19 - 30 - 15X = 0 \Rightarrow$$

$$X = \frac{21,19}{15} = 1,4 \text{ m από το σημείο } \Gamma$$



ε) Υπολογισμός μέγιστης ροπής στο $X=1,4\text{m}$

M_{max}

Με εμβαδό

$$M_{max} = 51,19 \cdot 3,5 + \frac{21,19 \cdot 1,4}{2} \approx 194 \text{ kNm}$$

ή

$$M_{max} = R_A \cdot (3,5 + X) - F_1 \cdot X - q \cdot X^2 / 2 =$$

$$51,19 \cdot (3,5 + 1,4) - 30 \cdot 1,4 - 15 \cdot (1,4)^2 / 2 =$$

$$= 193,62 \text{ kNm}$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ