ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-2026

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3ΩΡΟ ΚΚ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ0043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΞΙ (6) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΚΑΙ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΩΝ (3) ΣΕΛΙΔΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

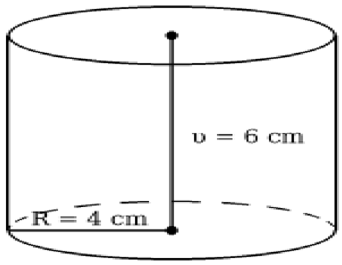
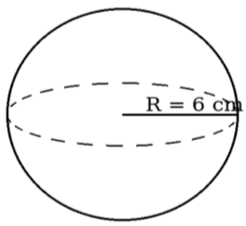
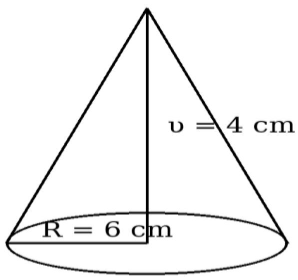
Α1. Να δώσετε τον χαρακτηρισμό ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ σε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις. **Να μεταφέρετε τον πιο κάτω πίνακα απαντήσεων στο τετράδιο απαντήσεών σας.**

(α)	Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι $f(2) > f(3)$.
(β)	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημείο καμπής.
(γ)	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x - 3\,, x \in [-2,4]$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή το $f(4) = 5$.
(δ)	$\int x^4 dx = 4x^3 + c$
(ε)	$\int x^3 dx \ = \dfrac{x^4}{4} + c$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

(α)	**(β)**	**(γ)**	**(δ)**	**(ε)**

A2. Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της ΣΤΗΛΗΣ Α με τη σωστή απάντηση της ΣΤΗΛΗΣ Β. Στο Τετράδιο Απαντήσεων να γράψετε τον αριθμό της ΣΤΗΛΗΣ Α που αντιστοιχεί στο γράμμα της ΣΤΗΛΗΣ Β (π.χ. 1 – Α)

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. Ο όγκος ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $R = 4$ cm και ύψος $\upsilon = 6$ cm είναι:  	Α) $V = \frac{4\pi \cdot 6^3}{3}$ cm^3
2. Ο όγκος μιας σφαίρας με ακτίνα $R = 6$ cm είναι:  	Β) $E = 4\pi \cdot 6^2$ cm^2
3. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας με ακτίνα $R = 6$ cm είναι:	Γ) $V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 4}{3}$ cm^3
4. Ο όγκος ενός κώνου με ακτίνα βάσης $R = 6$ cm και ύψος $\upsilon = 4$ cm είναι:  	Δ) $E = 2\pi \cdot 4 \cdot 6$ cm^2
5. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $R = 4$ cm και ύψος $\upsilon = 6$ cm είναι:	Ε) V= $\pi \cdot 4^2 \cdot 6$ cm^3

Α3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \left(3x^5 - 2x + \frac{2}{3}\right) dx =$

(β) $\int x(2x+5)dx =$

Α4. Δίνεται η λέξη «**ΚΟΜΜΩΤΙΚΗ».**

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, οι οποίοι αρχίζουν και τελειώνουν με το γράμμα **Μ.**

Α5. Μια εταιρεία τεχνολογίας απασχολεί πέντε (5) προγραμματιστές και τρεις (3) σχεδιαστές. Από αυτούς θα επιλεγεί τυχαία μια τετραμελής ομάδα για μια νέα μελέτη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

$A =$ {η ομάδα να αποτελείται από ακριβώς τρεις (3) προγραμματιστές}

$B =$ {η ομάδα να αποτελείται από άτομα και των δύο ειδικοτήτων}

Α6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x \ , \ x \in \mathbb{R}$$

(α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $\alpha = -6$, να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο καμπής και, αν υπάρχει, να το υπολογίσετε.

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες, ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.

Β1. Σε μια καφετέρια καταγράφηκε, για 8 διαφορετικές ημέρες, ο αριθμός των ωρών λειτουργίας του εξωτερικού χώρου $(\boldsymbol{x_i})$ και ο αριθμός ροφημάτων που πωλήθηκαν $(\boldsymbol{y_i})$, σε δεκάδες.

Αριθμός των ωρών λειτουργίας $(\boldsymbol{x_i})$	**Αριθμός ροφημάτων** $(\boldsymbol{y_i})$
2	3
3	4
4	6
5	7
7	9
8	9
9	7
10	11

Δίνονται τα αθροίσματα: $\sum x_i = 48$, $\sum y_i = 56$, $\sum x_i y_i = 385$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 60$ και $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 50$ όπου $\bar{x}, \bar{y}$ η μέση τιμή των x_i, y_i, αντίστοιχα.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και $\bar{y}$ του αριθμού των ωρών λειτουργίας (x_i) και του αριθμού ροφημάτων (y_i), αντίστοιχα.

(4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης (r) των ωρών λειτουργίας (x_i) και του αριθμού ροφημάτων (y_i).

(4 μονάδες)

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

(2 μονάδες)

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα πιο κάτω:

(i) $f(0) = 0\,,\ f(1) = -2,\ f(2) = -4\,,\ f(3) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Δίνονται επίσης, οι πίνακες μεταβολής των προσήμων των συναρτήσεων f' και f'':

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

(α) Με την βοήθεια των πιο πάνω ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε:

(i) Τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων. **(4 μονάδες)**

(ii) Τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα. **(5 μονάδες)**

(iii) Τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. **(3 μονάδες)**

(β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(3 μονάδες)**

Β3. Μια εταιρεία κατασκευάζει **χωνάκια παγωτού** σε σχήμα ορθού κώνου. Για κατασκευαστικούς λόγους, το μήκος της γενέτειρας (λ) και η ακτίνα της βάσης (R) του κώνου, συνδέονται με τη σχέση: $\boldsymbol{\lambda + 2R = 12}$, $0 < R < 6$.

(α) Να εκφράσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου ως συνάρτηση της ακτίνας (R).

(5 μονάδες)

(β) Να βρείτε την τιμή της ακτίνας (R) σε cm για την οποία το χωνάκι έχει **μέγιστη κυρτή επιφάνεια** αν ισχύει: $\boldsymbol{E_\kappa = 12\pi R - 2\pi R^2}$

(6 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της κυρτής επιφάνειας για ένα χωνάκι αν η ακτίνα (R) είναι ίση με $3\ \mathrm{cm}$. (Η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του π)

(4 μονάδες)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\nu}} \quad \text{ή} \quad s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i{x_i}^2}{\nu}-\bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu=\sum_{i=1}^{\kappa}f_i$$

$$r=\frac{\Sigma_{xy}-\nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A\pm B)=\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B\pm\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A\pm B)=\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\mp\eta\mu A\eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad \sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu2\alpha=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \sigma\upsilon\nu2\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t=\varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \qquad \eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu\frac{B-A}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$x = 360^o\kappa + \alpha$ ή $x = 360^o\kappa + 180^o - \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$x = 360^o\kappa \pm \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha$	$x = 180^o\,\kappa + \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E\pi = \Pi_\beta . \upsilon$	$V = E_\beta . \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta \cdot h$	$V = \frac{E_\beta . \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_\kappa = 2\pi R\upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_\kappa = \pi R\lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_\kappa = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1,y_1)$ από την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$: $d=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Έλλειψη: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$

Εστίες $(\pm\gamma,0)$, Διευθετούσες $x=\pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$, Εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \qquad (\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c \qquad \int \sigma\tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$