ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-2026

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3ΩΡΟ ΚΚ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ0043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΩΔΕΚΑ (12) ΣΕΛΙΔΕΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Να δώσετε τον χαρακτηρισμό ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ σε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις. **Να μεταφέρετε τον πιο κάτω πίνακα απαντήσεων στο τετράδιο απαντήσεών σας.**

(α)	Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι $f(2) > f(3)$.
(β)	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημείο καμπής.
(γ)	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x - 3\,, x \in [-2,4]$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή το $f(4) = 5$.
(δ)	$\int x^4 dx = 4x^3 + c$
(ε)	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

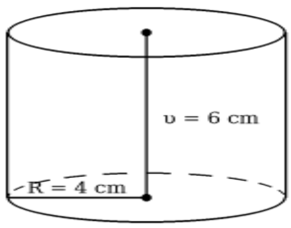
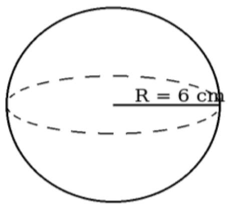
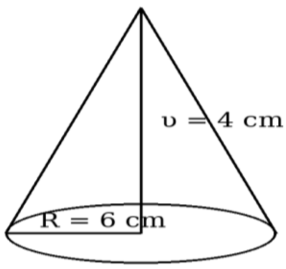
(α)	**(β)**	**(γ)**	**(δ)**	**(ε)**

<u>Λύση:</u>

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

(α)	**(β)**	**(γ)**	**(δ)**	**(ε)**
ΛΑΘΟΣ	ΣΩΣΤΟ	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ	ΣΩΣΤΟ

Α2. Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της ΣΤΗΛΗΣ Α με τη σωστή απάντηση της ΣΤΗΛΗΣ Β. Στο Τετράδιο Απαντήσεων να γράψετε τον αριθμό της ΣΤΗΛΗΣ Α που αντιστοιχεί στο γράμμα της ΣΤΗΛΗΣ Β (π.χ. 1 – Α)

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. Ο όγκος ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $R = 4$ cm και ύψος $\upsilon = 6$ cm είναι: 	Α) $V = \frac{4\pi \cdot 6^3}{3}$ cm^3
2. Ο όγκος μιας σφαίρας με ακτίνα $R = 6$ cm είναι: 	Β) $E = 4\pi \cdot 6^2\ \text{cm}^2$
3. Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας με ακτίνα $R = 6$ cm είναι:	Γ) $V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 4}{3}$ cm^3
4. Ο όγκος ενός κώνου με ακτίνα βάσης $R = 6$ cm και ύψος $\upsilon = 4$ cm είναι: 	Δ) $E = 2\pi \cdot 4 \cdot 6\ \text{cm}^2$
5. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης $R = 4$ cm και ύψος $\upsilon = 6$ cm είναι:	Ε) V= $\pi \cdot 4^2 \cdot 6\ \text{cm}^3$

<u>Λύση:</u>

1 – Ε	**2 – Α**	**3 – Β**	**4 – Γ**	**5 – Δ**

Α3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \left(3x^5 - 2x + \frac{2}{3}\right) dx =$

(β) $\int x(2x+5)dx =$

<u>Λύση:</u>

(α) $\int \left(3x^5 - 2x + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{3x^6}{6} - \frac{2x^2}{2} + \frac{2}{3}x + c = \frac{x^6}{2} - x^2 + \frac{2}{3}x + c$

(β) $\int x(2x+5)dx = \int (2x^2 + 5x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + c$

Α4. Δίνεται η λέξη «**ΚΟΜΜΩΤΙΚΗ».**

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, οι οποίοι αρχίζουν και τελειώνουν με το γράμμα **Μ.**

<u>Λύση:</u>

(α) Η λέξη αποτελείται από 9 γράμματα από τα οποία 2 ($\boldsymbol{MM}$) και 2 ($\boldsymbol{KK}$) είναι τα ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από όλα τα υπόλοιπα. Συνεπώς, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{2!\,2!} = 90720$$

(β) Ο υπολογισμός γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση του ενός από τα δύο γράμματα $\boldsymbol{M}$ στην πρώτη θέση και του άλλου $\boldsymbol{M}$ στην τελευταία θέση, η οποία γίνεται με έναν τρόπο. Στη δεύτερη φάση, πρέπει να τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα 7 γράμματα στις θέσεις που απομένουν από τα οποία τα δύο ($\boldsymbol{KK}$) είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα υπόλοιπα, με $M_7^{\varepsilon} = \frac{7!}{2!} = 2520$ τρόπους. Συνολικά, έχουμε

$$1 \cdot 2520 = 2520 \text{ τρόπους}$$

Α5. Μια εταιρεία τεχνολογίας απασχολεί πέντε (5) προγραμματιστές και τρεις (3) σχεδιαστές. Από αυτούς θα επιλεγεί τυχαία μια τετραμελής ομάδα για μια νέα μελέτη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

$A=$ {η ομάδα να αποτελείται από ακριβώς τρεις (3) προγραμματιστές}

$B=$ {η ομάδα να αποτελείται από άτομα και των δύο ειδικοτήτων}

<u>Λύση:</u>

Το πλήθος των τετραμελών ομάδων που μπορούν να επιλεγούν είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω.

$$\nu(\Omega)=\binom{8}{4}=\frac{8!}{(8-4)!\,4!}=\frac{8!}{4!\,4!}=70$$

Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

$A=$ {η ομάδα να αποτελείται από ακριβώς τρεις (3) προγραμματιστές}

Αφού στο ενδεχόμενο A η ομάδα θα αποτελείται από ακριβώς τρεις (3) προγραμματιστές τότε θα περιλαμβάνει και ακριβώς ένα (1) σχεδιαστή. Υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή:

$$\nu(A)=\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{1}=\frac{5!}{(5-3)!\,3!}\cdot\frac{3!}{(3-1)!\,1!}=10\cdot 3=30$$

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε:

$$P(A)=\frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$$

Ορίζουμε το ενδεχόμενο

$B=$ {η ομάδα να αποτελείται από άτομα και των δύο ειδικοτήτων}

Αφού στο ενδεχόμενο B η ομάδα θα αποτελείται από άτομα και των δύο ειδικοτήτων τότε η ομάδα μπορεί να αποτελείται είτε από 3 προγραμματιστές και 1 σχεδιαστή, είτε από 2 προγραμματιστές και 2 σχεδιαστές, είτε από 1 προγραμματιστή και 3 σχεδιαστές. Υπολογίζουμε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή:

$$\nu(B)=\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{1}+\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}+\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{3}$$

$$=30+\frac{5!}{(5-2)!\,2!}\cdot\frac{3!}{(3-2)!\,2!}+\frac{5!}{(5-1)!\,1!}\cdot\frac{3!}{(3-3)!\,3!}$$

$$=30+30+5=65$$

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε

$$P(B)=\frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ $P(B)$:</u>

Ορίζουμε το ενδεχόμενο

$$B' = \{\text{η ομάδα να αποτελείται μόνο από προγραμματιστές}\}$$

$$\nu(B') = \binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-4)!\,4!} = 5$$

$$P(B') = \frac{\nu(B')}{\nu(\Omega)} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

Α6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x \,,\, x \in \mathbb{R}$$

(α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $\alpha = -6$, να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο καμπής και, αν υπάρχει, να το υπολογίσετε.

<u>Λύση:</u>

(α) Λόγω του θεωρήματος του Fermat, ισχύει ότι:

$$f'(1) = f'(3) = 0$$

Έχουμε,

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta,\, x \in \mathbb{R}$$

και

$$f'(1) = 0 \implies 3 + 2\alpha + \beta = 0 \implies 2\alpha + \beta = -3 \qquad (1)$$

$$f'(3) = 0 \implies 27 + 6\alpha + \beta = 0 \implies 6\alpha + \beta = -27 \qquad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα με τις σχέσεις (1) και (2), για να βρούμε τα α και β.

Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha+\beta=-3 \\ 6\alpha+\beta=-27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=-3\ -2\alpha \\ 6\alpha+\beta=-27 \end{array}\right\} \Rightarrow 6\alpha-3-2\alpha=-27$$

$$\Rightarrow 4\alpha=\ -24 \Rightarrow \boxed{\alpha=-6}$$

και $\beta=-3-2\alpha \Rightarrow \beta=-3+12 \Rightarrow \boxed{\beta=+9}$.

(β) $f''(x)=6x+2\alpha$

Αν $\alpha=-6$, τότε $f''(x)=6x-12$

$f''(x)=0\ \Rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=2.$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολής για την f''.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$			Σ.Κ.		

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=2$

$$f(2)=2^3\ -6\cdot 2^2+9\cdot 2=8-24+18=2.$$

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες, ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.

Β1. Σε μια καφετέρια καταγράφηκε, για 8 διαφορετικές ημέρες, ο αριθμός των ωρών λειτουργίας του εξωτερικού χώρου $(\boldsymbol{x_i})$ και ο αριθμός ροφημάτων που πωλήθηκαν $(\boldsymbol{y_i})$, σε δεκάδες.

Αριθμός των ωρών λειτουργίας $(\boldsymbol{x_i})$	**Αριθμός ροφημάτων** $(\boldsymbol{y_i})$
2	3
3	4
4	6
5	7
7	9
8	9
9	7
10	11

Δίνονται τα αθροίσματα: $\sum x_i = 48$, $\sum y_i = 56$, $\sum x_i y_i = 385$, $\sum(x_i - \bar{x})^2 = 60$ και $\sum(y_i - \bar{y})^2 = 50$ όπου $\bar{x}, \bar{y}$ η μέση τιμή των x_i, y_i, αντίστοιχα.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και $\bar{y}$ του αριθμού των ωρών λειτουργίας (x_i) και του αριθμού ροφημάτων (y_i), αντίστοιχα.

(4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης (r) των ωρών λειτουργίας (x_i) και του αριθμού ροφημάτων (y_i).

(4 μονάδες)

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) Καταγράφηκαν δεδομένα για 8 διαφορετικές ημέρες, άρα: $\nu = 8$

Υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του αριθμού των ωρών λειτουργίας (x_i) :

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{\nu} = \frac{48}{8} = 6$$

και τη μέση τιμή $\bar{y}$ του αριθμού ροφημάτων (y_i):

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{\nu} = \frac{56}{8} = 7$$

(β) Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης (r) των ωρών λειτουργίας (x_i) και του αριθμού ροφημάτων (y_i), αρχικά υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση S_x:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{\mathrm{x}})^2}{\nu}} \Rightarrow S_x = \sqrt{\frac{60}{8}} = \sqrt{7,5} = 2,739$$

και την τυπική απόκλιση S_y:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \overline{\mathrm{y}})^2}{\nu}} \Rightarrow S_y = \sqrt{\frac{50}{8}} = \sqrt{6,25} = 2,5$$

Επομένως,

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \nu\,\overline{x}\,\overline{y}}{\nu S_x S_y} = \frac{385 - 8 \cdot 6 \cdot 7}{8 \cdot 2,739 \cdot 2,5} = \frac{49}{54,78} = 0,894$$

(γ) Παρατηρούμε ότι υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών αφού ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός αριθμός «κοντά» στο 1.

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα πιο κάτω:

(i) $f(0) = 0\,,\ f(1) = -2,\ f(2) = -4\,,\ f(3) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Δίνονται επίσης, οι πίνακες μεταβολής των προσήμων των συναρτήσεων f' και f'':

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

(α) Με την βοήθεια των πιο πάνω ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε:

(i) Τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων. **(4 μονάδες)**

(ii) Τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα. **(5 μονάδες)**

(iii) Τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής.

(3 μονάδες)

(β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(3 μονάδες)**

<u>Λύση:</u>

(α)

(i) Για τα σημεία τομής με τον άξονα των τεταγμένων θέτουμε:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{(0,0)}$$

Για τα σημεία τομής με τον άξονα των τετμημένων θέτουμε:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ διπλή ή } x = 3$$

Άρα έχουμε τα σημεία $\boxed{(0,0)}$ και $\boxed{(3,0)}$

(ii) Από τον πίνακα μεταβολής των προσήμων της συνάρτησης f':

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 0$

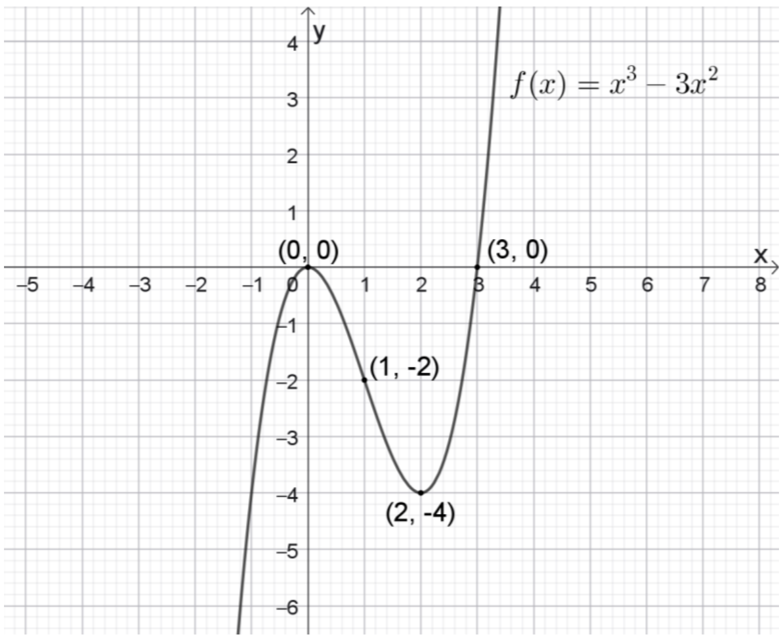
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$, το $f(2) = -4$

(iii) Από τον πίνακα μεταβολής των προσήμων της συνάρτησης f'':

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = 1$ το $f(1) = -2$

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f:



B3. Μια εταιρεία κατασκευάζει **χωνάκια παγωτού** σε σχήμα ορθού κώνου. Για κατασκευαστικούς λόγους, το μήκος της γενέτειρας (λ) και η ακτίνα της βάσης (R) του κώνου, συνδέονται με τη σχέση: $\boldsymbol{\lambda + 2R = 12}$, $0 < R < 6$.

(α) Να εκφράσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου ως συνάρτηση της ακτίνας (R).

(5 μονάδες)

(β) Να βρείτε την τιμή της ακτίνας (R) σε cm για την οποία το χωνάκι έχει **μέγιστη κυρτή επιφάνεια** αν ισχύει: $\boldsymbol{E_\kappa = 12\pi R - 2\pi R^2}$

(6 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της κυρτής επιφάνειας για ένα χωνάκι αν η ακτίνα (R) είναι ίση με $3\ \mathrm{cm}$. (Η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του π)

(4 μονάδες)

<u>Λύση:</u>

(α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου δίνεται από τον τύπο:

$$E_\kappa = \pi R \lambda \qquad (1)$$

Δίνεται επίσης ότι: $\lambda + 2R = 12 \Rightarrow \lambda = 12 - 2R$ $\qquad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$E_\kappa = \pi R(12 - 2R) = 12\pi R - 2\pi R^2$$

(β) Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $E_\kappa(R)$:

$$E'_\kappa(R) = 12\pi - 4\pi R$$

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, έχουμε:

$$E'_\kappa(R) = 0 \Rightarrow 12\pi - 4\pi R = 0 \Rightarrow 12\pi = 4\pi R \Rightarrow \boxed{R = 3\ cm}$$

και $0 < R < 6$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για τη συνάρτηση $E_\kappa(R)$:

R	0		3		6
$E'_\kappa(R)$		+	0	-	
$E_\kappa(R)$		↗	max	↘	

Συνεπώς το χωνάκι έχει **μέγιστη** κυρτή επιφάνεια όταν η ακτίνα $R = 3\ cm$.

(γ) Όταν $R = 3$ cm, τότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\lambda = 12 - 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή της κυρτής επιφάνειας είναι:

$$E_\kappa = \pi R \lambda = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi\ cm^2$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ