ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-2026

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2ΩΡΟ ΤΣ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0050

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ <u>ΕΠΤΑ (7)</u> ΣΕΛΙΔΕΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>:

Α1.	Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 4x = 0$
	<u>Λύση</u>: **<u>Α΄τρόπος:</u>** Κάνουμε παραγοντοποίηση βγάζοντας κοινό παράγοντα το x: $$x(x-4)=0$$ Ένα γινόμενο είναι μηδέν όταν **τουλάχιστον ένας παράγοντας** είναι μηδέν, άρα: • $\boxed{x=0}$ ή • $x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$ **<u>Β΄ τρόπος:</u>** Δίνεται η εξίσωση: $$x^2-4x=0$$ Έχουμε συντελεστές: $$\alpha=1, \qquad \beta=-4, \qquad \gamma=0$$ Η διακρίνουσα είναι: $$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot0=16$$ Οι λύσεις δίνονται από τον τύπο: $$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$ Άρα: $$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{4\pm4}{2}$$ Οπότε: $$x_1=\frac{4+4}{2} \Rightarrow \boxed{x_1=4}\ , \qquad x_2=\frac{4-4}{2} \Rightarrow \boxed{x_2=0}$$
Α2.	Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ=8\ cm$ και $ΒΓ=5\ cm$. Να υπολογίσετε: **(α)** Το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$. **(β)** Την περίμετρο του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$.
	<u>Λύση</u>: **(α)** Το εμβαδόν ορθογωνίου είναι: $$E=(\text{μήκος})\cdot(\text{πλάτος})=ΑΒ\cdot ΒΓ$$ Άρα: $E=8\cdot5 \Rightarrow \boxed{E=40\ cm^2}$

(β) Η περίμετρος ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2(\text{μήκος} + \text{πλάτος}) = 2(\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ})$$

Άρα: $\Pi = 2(8+5) = 2 \cdot 13 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{\Pi = 26\, cm}$

Α3. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

<u>Λύση</u>:

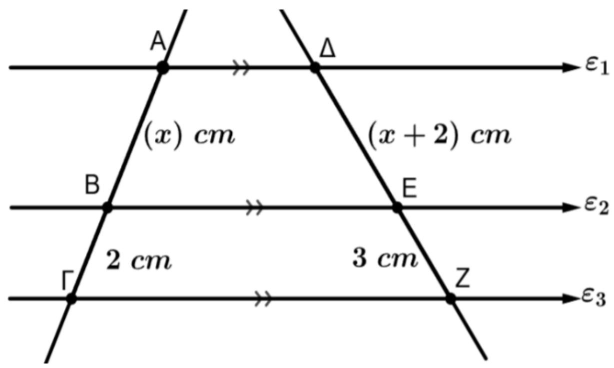
Πρόσθεση κατά μέλη (για να φύγει το y):

$$(x+y) + (2x - y) = 10 + 5 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

Αντικαθιστούμε το $x = 5$ στην 1η εξίσωση:

$$5 + y = 10 \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

Α4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, $AB = (x)\ cm$, $B\Gamma = 2\ cm$, $\Delta E = (x+2)\ cm$ και $EZ = 3\ cm$.
Να υπολογίσετε το x.



<u>Λύση</u>:

Έχουμε τρεις παράλληλες $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ που τέμνονται από δύο τέμνουσες, άρα από το **Θεώρημα Θαλή** έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$$

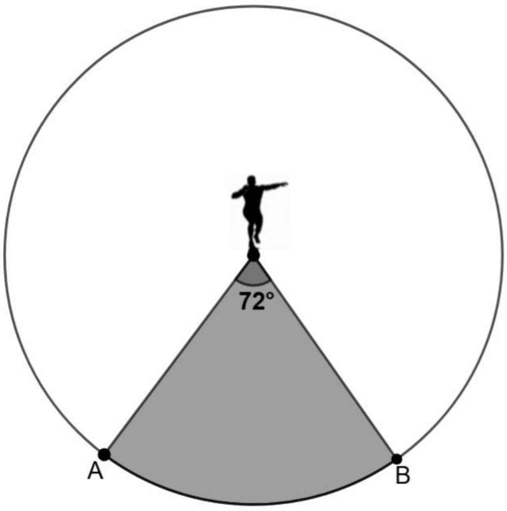
Δίνονται:

$$\text{ΑΒ} = x\ cm, \qquad \text{ΒΓ} = 2\ cm, \qquad \Delta E = (x+2)\ cm, \qquad EZ = 3\ cm$$

Άρα:

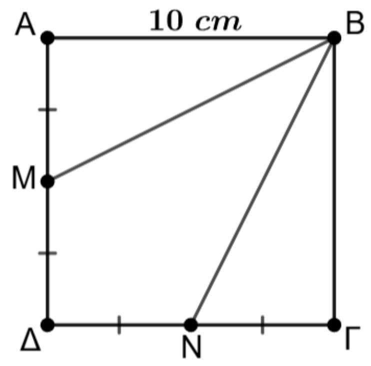
$$\frac{x}{2} = \frac{x+2}{3}$$

$$\Rightarrow\; 3x = 2(x+2) \;\Rightarrow\; 3x = 2x + 4 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 4\ cm}$$

Α5.	Ένας αθλητής στέκεται στο κέντρο ενός κυκλικού στίβου ο οποίος έχει εμβαδόν $400\pi\ m^2$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο αθλητής αγωνίζεται στο άθλημα της σφαιροβολίας και η περιοχή στην οποία επιτρέπεται να ρίχνει τη σφαίρα είναι η σκιασμένη. Η επίκεντρη γωνία του κυκλικού αυτού τομέα είναι ίση με 72°.  Να υπολογίσετε: **(α)** Το μήκος του μικρού τόξου $\widehat{AB}$. **(6 μονάδες)** **(β)** Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής. **(4 μονάδες)**
	<u>**Λύση**</u>**:** **(α)** Δίνεται ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι $400\pi\ m^2$. Άρα: $\pi\rho^2 = 400\pi \Rightarrow \rho^2 = 400 \Rightarrow \boxed{\rho = 20\,m}$ και η επίκεντρη γωνία είναι: $\mu = 72^\circ$ Μήκος μικρού τόξου $\widehat{AB}$ Ο τύπος είναι: $\gamma_{\widehat{AB}} = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2\pi\rho$ Άρα: $\gamma_{\widehat{AB}} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 20 = \frac{1}{5} \cdot 40\pi \Rightarrow \boxed{\gamma_{\widehat{AB}} = 8\pi\ m}$ (β) Εμβαδόν σκιασμένης περιοχής (κυκλικός τομέας) Ο τύπος είναι: $E_{\text{κ. τομ.}} = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot \pi\rho^2$ Άρα: $E_{\sigma\kappa} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 20^2 = \frac{1}{5} \cdot 400\pi \Rightarrow \boxed{E_{\sigma\kappa} = 80\pi\ m^2}$

Α6. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$, με πλευρά ίση με $10\ cm$.

Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΔ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MAB και $NΓB$ έχουν ίσα εμβαδά. **(6 μονάδες)**

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BMΔN$ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο παραπάνω τριγώνων. **(4 μονάδες)**

<u>Λύση</u>:

(α) Τα M, N είναι μέσα των $ΑΔ$ και $ΔΓ$ αντίστοιχα, άρα:

$$MA = MΔ = \frac{ΑΔ}{2} = 5\ cm\,, \qquad NΔ = NΓ = \frac{ΔΓ}{2} = 5\ cm$$

Στο τρίγωνο MAB παίρνουμε βάση $AB = 10\ cm$ και ύψος την απόσταση του M από την AB. Επειδή $ΑΒΓΔ$ τετράγωνο, η απόστασή του M από την AB είναι $\mathrm{MA} = 5\ cm$.

Άρα:

$$E_{\mathrm{MAB}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MA = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{E_{MAB} = 25\ cm^2}$$

Στο τρίγωνο $NΓB$ παίρνουμε βάση $BΓ = 10\ cm$ και ύψος την απόσταση του N από την $BΓ$. Επειδή $ΑΒΓΔ$ τετράγωνο, η απόστασή του N από την $BΓ$ είναι $NΓ = 5\ cm$.

Άρα:

$$E_{\mathrm{NΓB}} = \frac{1}{2} \cdot BΓ \cdot NΓ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{E_{NΓB} = 25\ cm^2}$$

Επομένως:

$$\boxed{E_{\mathrm{MAB}} = E_{\mathrm{NΓB}}}$$

(β) Το τετράγωνο χωρίζεται (όπως στο σχήμα) σε **τρία ξένα μεταξύ τους** μέρη, άρα για τα εμβαδά ισχύει η σχέση:

$$E_{\mathrm{ΑΒΓΔ}} = E_{\mathrm{MAB}} + E_{\mathrm{BMΔN}} + E_{\mathrm{NΓB}}.$$

Όμως:

$$E_{\mathrm{ΑΒΓΔ}} = 10 \cdot 10 = 100\ cm^2$$

και από το (α) έχουμε $E_{\mathrm{MAB}} = E_{\mathrm{NΓB}} = 25\ cm^2$, επομένως:

	$$100 = 25 + E_{\mathrm{BM\Delta N}} + 25 \Rightarrow \boxed{E_{\mathrm{BM\Delta N}} = 50\ cm^2}$$ Επίσης, $E_{\mathrm{MAB}} + E_{\mathrm{N\Gamma B}} = 25 + 25 = 50\ cm^2$ Άρα, $$\boxed{E_{\mathrm{BM\Delta N}} = E_{\mathrm{MAB}} + E_{\mathrm{N\Gamma B}}}$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>:

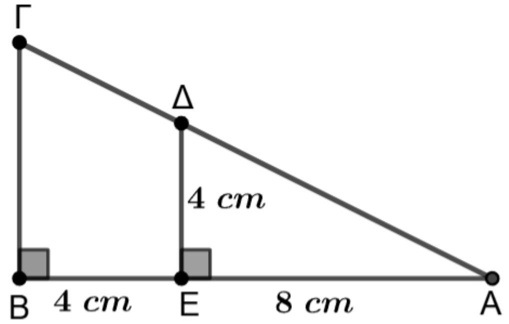
Β1.	Μια εταιρεία εγκατάστασης φωτοβολταϊκών στην Κύπρο θέλει να στήσει ένα πάρκο χρησιμοποιώντας δύο τύπους πάνελ: <u>Τύπος Α</u>: παράγει $300W$ και κοστίζει $€200/πάνελ$. <u>Τύπος Β</u>: παράγει $500W$ και κοστίζει $€300/πάνελ$. Ο προϋπολογισμός της εταιρείας είναι €21000 και επιθυμούν να τοποθετήσουν συνολικά 90 πάνελ (λόγω χωρητικότητας του σκελετού στήριξης). Να υπολογίσετε πόσα πάνελ από κάθε τύπο πρέπει να επιλέξουν ώστε να εξαντλήσουν τον προϋπολογισμό και να χρησιμοποιήσουν ακριβώς 90 πάνελ.
	<u>Λύση</u>: Θέτουμε: • $x =$ αριθμός πάνελ Τύπου Α • $y =$ αριθμός πάνελ Τύπου Β Δίνονται οι εξισώσεις : Σύνολο πάνελ: $$x + y = 90$$ Προϋπολογισμός: $$200x + 300y = 21000$$ Διαιρούμε τη δεύτερη εξίσωση με 100: $$2x + 3y = 210$$ Λύνουμε το σύστημα: $$\begin{cases} x + y = 90 \\ 2x + 3y = 210 \end{cases}$$ Από την πρώτη εξίσωση: $$x = 90 - y$$

	Αντικατάσταση στη δεύτερη εξίσωση: $2(90-y)+3y=210 \Rightarrow 180-2y+3y=210 \Rightarrow 180+y=210$ $\Rightarrow \boxed{y=30}$ Άρα: $x=90-30 \Rightarrow \boxed{x=60}$ **Απάντηση:** Πρέπει να επιλέξουν 60 πάνελ Τύπου Α και 30 πάνελ Τύπου Β
Β2.	Δίνεται η εξίσωση $x^2+2x-6=0$, η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς $x_1,\ x_2$. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση: **(α)** Να βρείτε το είδος των λύσεων της εξίσωσης. **(3 μονάδες)** **(β)** Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων: **i.** x_1+x_2 **(2 μονάδες)** **ii.** $x_1 \cdot x_2$ **(2 μονάδες)** **iii.** $x_1 \cdot x_2+4\,x_1+4x_2$ **(4 μονάδες)** **iv.** $x_1^2 \cdot x_2+x_1 \cdot x_2^2$ **(4 μονάδες)**
	<u>Λύση</u>: **(α)** Η εξίσωση είναι $x^2+2x-6=0$ Έχουμε τους συντελεστές $\alpha=1, \beta=2, \gamma=-6.$ Η διακρίνουσα είναι: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-6)=4+24=28>0,$ οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες. **(β)** Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις: i. $x_1+x_2=S=-\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \boxed{x_1+x_2=-2}$ ii. $x_1\cdot x_2=P=\frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \boxed{x_1\cdot x_2=-6}$ iii. $x_1\cdot x_2+4x_1+4x_2=(x_1\cdot x_2)+4(x_1+x_2)=P+4S$ $=-6+4\cdot(-2)=-6-8 \Rightarrow \boxed{x_1\cdot x_2+4x_1+4x_2=-14}$ iv. $x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=P\cdot S=(-6)\cdot(-2)$ $\Rightarrow \boxed{x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=12}$
Β3.	Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B}=90°$) και Δ τυχαίο σημείο της $A\Gamma$, από το οποίο φέρουμε $\Delta E \perp AB$. Επιπλέον δίνονται οι $BE=4\ cm, EA=8\ cm$ και $\Delta E=4\ cm$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΕΔ$ είναι όμοια.**(6 μονάδες)**

(β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι: $(ΑΒ)\cdot(ΕΔ)=(ΑΕ)\cdot(ΒΓ)$ **(2 μονάδες)**

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $ΒΓ$. **(2 μονάδες)**



<u>Λύση</u>:

(α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΕΔ$:

- Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β $\Rightarrow\ \hat{B}=90°$
- Από την κατασκευή, $ΔΕ \perp ΑΒ \ \Rightarrow Α\hat{Ε}Δ=90°$

Άρα:

$$\hat{B}=Α\hat{Ε}Δ=90°$$

Επιπλέον, τα δύο τρίγωνα έχουν την ίδια κορυφή $Α$:

$$Β\hat{Α}Γ=Ε\hat{Α}Δ$$

Συνεπώς, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΕΔ$ είναι όμοια, $ΒΑΓ \approx\ ΕΑΔ$
(τα τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες μία προς μία)

(β) Από την ομοιότητα των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΕΔ$ προκύπτει η αναλογία των αντίστοιχων πλευρών:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΔ}$$

Συνεπώς,

$$(ΑΒ)\cdot(ΕΔ)=(ΑΕ)\cdot(ΒΓ)$$

(γ) Αρχικά βρίσκουμε το $ΑΒ$:

$$ΑΒ=ΒΕ+ΕΑ=4+8=12\ cm$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση από το (β):

$$(ΑΒ)\cdot(ΕΔ)=(ΑΕ)\cdot(ΒΓ)$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές:

$$12\cdot 4=8\cdot(ΒΓ)\ \Rightarrow\ 48=8\cdot(ΒΓ)\ \Rightarrow\ \boxed{ΒΓ=6\ cm}$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ