ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025 - 2026

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3ΩΡΟ ΚΚ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β0043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΕΠΤΑ (7) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Να δώσετε τον χαρακτηρισμό ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ σε κάθε μία από τις πιο κάτω προτάσεις. **Να μεταφέρετε στο τετράδιο απαντήσεών σας μόνο τον πίνακα απαντήσεων.**

(α)	$\lim_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$
(β)	Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = -3x$ στο σημείο $x_0 = -2$ έχει τιμή $f'(-2) = -3$.
(γ)	Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x > 0$ είναι η $f'(x)= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$.
(δ)	Αν το $f(x)$ ειναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού, τότε το $f'(x)$ είναι ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού.
(ε)	Αν $f(x) = -2x^5(x^3 - 2x + 8), x \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) = -10x^4(3x^2 - 2)$.

<u>Λύση:</u>

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

(α)	**(β)**	**(γ)**	**(δ)**	**(ε)**
ΛΑΘΟΣ	**ΣΩΣΤΟ**	**ΣΩΣΤΟ**	**ΣΩΣΤΟ**	**ΛΑΘΟΣ**

Α2. Δίνεται το πιο κάτω φυλλογράφημα για τα αποτελέσματα μιας εξέτασης στην οποία παρακάθησαν 12 μαθητές. Η μικρότερη βαθμολογία ήταν 60%.

6	0 1 3 5 8
7	2 2 6 9
8	0 7
9	6

(α) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή της βαθμολογίας. **(4 μονάδες)**
(β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο βαθμολογία. **(6 μονάδες)**

Λύση:

(α) $x_\varepsilon = 72$ (παρουσιάζεται 2 φορές, ενώ οι άλλες παρατηρήσεις μόνο μία).

(β) $x_\delta = \frac{72+72}{2} = 72$ (αφού ν=12, η διάμεσος τιμή x_δ είναι η τιμή που βρίσκεται μεταξύ της 6ης και της 7ης παρατήρησης και ισαπέχει απο αυτές).

Α3. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ δίνονται $\alpha = 3\ cm,\ \beta = 3\sqrt{3}\ cm$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $0° < \hat{B} < 90°$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας B του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση:

Νόμος ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \frac{3}{\eta\mu(30^o)} = \frac{3\sqrt{3}}{\eta\mu B} \Rightarrow 3\eta\mu B = 3\sqrt{3}\eta\mu(30^o) \Rightarrow \eta\mu B = \frac{3\sqrt{3}\ \cdot \frac{1}{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \eta\mu B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^o \text{ή } \hat{B} = 180° - 60° = 120°.$$

Επομένως $\hat{B} = 60^o$ γιατί $0° < \hat{B} < 90°$.

Α4. Σε κύκλο ακτίνας R, το εμβαδόν κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε τόξο 30^o είναι ίσο με $3\pi\ cm^2$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση:

$$E_{\kappa.\tau.} = \frac{\pi R^2 \mu°}{360°} \Rightarrow 3\pi = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 30°}{360°} \Rightarrow 3\pi = \frac{\pi \cdot R^2}{12} \Rightarrow 36\pi = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 36$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{36} \Rightarrow R = 6\ cm$$

Α5. Σε ένα πρόγραμμα αποταμίευσης, η Μαρία βάζει χρήματα κάθε μήνα σε έναν κουμπαρά. Τον πρώτο μήνα έβαλε 12 ευρώ και σε κάθε επόμενο μήνα έβαζε 3 ευρώ περισσότερα από τον προηγούμενο μήνα. Αν στον τελευταίο μήνα αποταμίευσης της έβαλε 57 ευρώ, να υπολογίσετε:

(α) Πόσους μήνες κράτησε το πρόγραμμα αποταμίευσης της Μαρίας.

(β) Πόσα χρήματα αποταμίευσε συνολικά η Μαρία.

<u>Λύση:</u>

(α)

Τα λεφτά που αποταμιεύει κάθε μήνα η Μαρία είναι όροι σε Αριθμητική Πρόοδο:
12, 15, 18, … , …, 57, δηλαδή έχουμε $a_1 = 12, \delta = 3, a_\nu = 57$

$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\delta \Rightarrow 57 = 12 + (\nu - 1) \cdot 3 \Rightarrow 45 = 3(\nu - 1) \Rightarrow \nu - 1 = 15$

$\Rightarrow \nu = 16$ Το πρόγραμμα αποταμίευσης κράτησε 16 μήνες

(β)

<u>Α΄ τρόπος:</u>

$\Sigma_\nu = \frac{\nu(a_1+a_\nu)}{2} \Rightarrow \Sigma_{16} = \frac{16}{2}(12 + 57) = 8 \cdot 69 \Rightarrow \Sigma_{16} = 552$

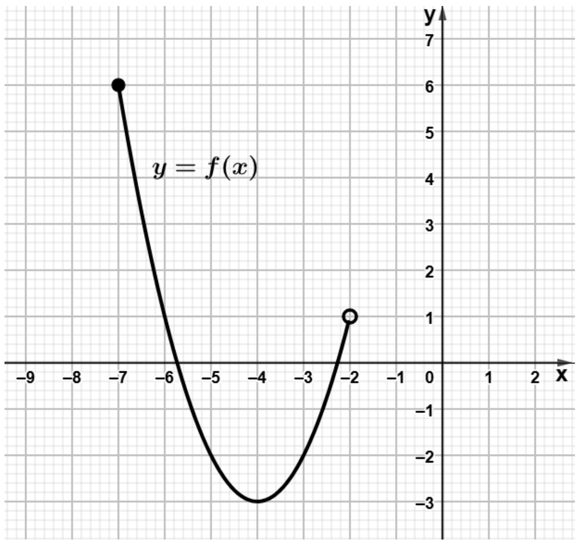
Αποταμίευσε συνολικά 552 ευρώ.

<u>Β΄ τρόπος:</u>

$\Sigma_\nu = \frac{\nu[2a_1+(\nu-1)\cdot\delta]}{2} \Rightarrow \Sigma_{16} = \frac{16\cdot[2\cdot 12+(16-1)\cdot 3]}{2} = \frac{16\cdot 69}{2} \Rightarrow \Sigma_{16} = 552$

Αποταμίευσε συνολικά 552 ευρώ.

Α6. Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.



Από τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$

(α) Να βρείτε:

- **(i)** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(3 μονάδες)**
- **(ii)** Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **(3 μονάδες)**
- **(iii)** Την τιμή $f(-3)$. **(2 μονάδες)**

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι $1 - 1$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(2 μονάδες)

Λύση:

(α)

(i) $[-7,-2)$ ή $\{x \in \mathbb{R}: \ -7 \leq x < -2\}$

(ii) $[-3,6]$ ή $\{y \in \mathbb{R}: -3 \leq y \leq 6\}$

(iii) $f(-3) = -2$

(β)

Η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$ γιατί:

Η ευθεία $y = a,$ τέμνει την καμπύλη σε 2 σημεία (το α να είναι οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $(-3,1)$).

ή

Να μεταφερθεί η γραφική παράσταση στο τετράδιο απαντήσεων και να σχεδιαστεί μια παράλληλη ευθεία προς τον xx' (ή οριζόντια ευθεία), η οποία να τέμνει την καμπύλη σε δύο διαφορετικά σημεία (που εξηγεί ότι διαφορετικά σημεία x, αντιστοιχούν σε κοινή τιμή του y).

ή

$\exists x_1, x_2 \in [-7,-2)$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$

Π.χ. $-5 \neq -3$ και $f(-5) = f(-3) = -2$

ΤΕΛΟΣ Α΄ ΜΕΡΟΥΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία, ενώ η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{2026} + x^{-2026}, \ x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f. **(4 μονάδες)**

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση

$f(x) + \frac{x\,f'(x)}{2026} = 2x^{2026}$. **(6 μονάδες)**

Λύση:

(α)

$f'(x) = 2026x^{2025} - 2026x^{-2027}$

(β)

$$A'M\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = f(x) + \frac{xf'(x)}{2026} = (x^{2026} + x^{-2026}) + \frac{x\left(2026x^{2025} - 2026x^{-2027}\right)}{2026}$$

$$= x^{2026} + x^{-2026} + \frac{2026x^{2026} - 2026x^{-2026}}{2026}$$

$$= x^{2026} + x^{-2026} + \frac{2026x^{2026}}{2026} - \frac{2026x^{-2026}}{2026} = x^{2026} + x^{-2026} + x^{2026} - x^{-2026}$$

$$= 2x^{2026} = B'M\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$$

Άρα $f(x) + \frac{x\,f'(x)}{2026} = 2x^{2026}$

B2. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x-4}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g. **(5 μονάδες)**

(β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων **(10 μονάδες)**

(i) $f + g$

(ii) $\frac{f}{g}$

<u>Λύση:</u>

(α)

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f**,** ως πολυωνυμική είναι το $\mathbb{R}$,δηλαδή $D_f = \mathbb{R}$.
Για τη συνάρτηση g θα πρέπει να ισχύει: $x - 4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 4$,
δηλαδή $D_g = [4, +\infty)$.

(β)

(i)

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [4, +\infty)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x-4}$$

(ii)

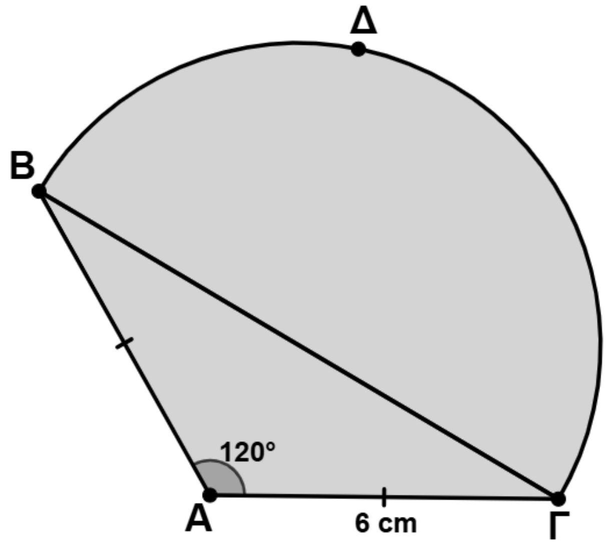
$$\text{Για Π.Ο της } \frac{f}{g}: \;\; D_{\frac{f}{g}} = \left\{D_f \cap D_g, g(x) \neq 0\right\} = \{[4, +\infty) \; \kappa\alpha\iota \; x \neq 4\} = (4, +\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x-4}}$$

Β3. Στο πιο κάτω σχήμα στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει $ΑΒ = ΑΓ = 6\ cm$ και $Γ\hat{Α}Β = 120°$. Γράφουμε το ημικύκλιο $ΒΔΓ$ με διάμετρο $ΒΓ$.

(α) Να δείξετε ότι $(ΒΓ) = 6\sqrt{3}\ cm$. **(5 μονάδες)**

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου $ΑΒΔΓΑ$. **(10 μονάδες)**



__Λύση:__

(α)

__Α΄ τρόπος__:

Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $\hat{Α} = 120°$.

Επομένως $\hat{Β} = \hat{Γ} = 30°$.

Εφαρμόζω νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο $ΑΒΓ$:

$$\frac{α}{ημΑ} = \frac{γ}{ημΓ} \text{ ή } \frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ}$$

$$\Rightarrow \frac{α}{ημ120°} = \frac{6}{ημ30°} \Rightarrow αημ30° = 6ημ120° \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot α = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow α = 6\sqrt{3}\ cm \text{ ή } (ΒΓ) = 6\sqrt{3}\ cm$$

Β΄ τρόπος:

Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 120°$. Επομένως $\hat{B} = \hat{Γ} = 30°$

Εφαρμόζω νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $ΑΒΓ$: $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυν\hat{A}$

$\Rightarrow α^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot συν120° \Rightarrow α^2 = 108 \Rightarrow α = \sqrt{108}$

$\Rightarrow α = 6\sqrt{3}\ cm$ ή $(ΒΓ) = 6\sqrt{3}\ cm$

(β)

$E_{σκιασ.} = E_{τριγ.} + E_{ημικ.}$

Εμβαδόν τριγώνου $ΑΒΓ$:

Α΄ τρόπος:

$E_{τριγ.} = \frac{αγημB}{2}$ ή $E_{τριγ.} = \frac{αβημΓ}{2}$

$$E_{τριγ.} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot ημ30°}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

Β΄ τρόπος:

$$E_{τριγ.} = \frac{βγημA}{2}$$

$$E_{τριγ.} = \frac{6 \cdot 6 \cdot ημ120°}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

Εμβαδόν ημικυκλίου:

$$E_{ημικ.} = \frac{πR^2}{2},\ R = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ cm \Rightarrow E_{ημικ.} = \frac{π \cdot (3\sqrt{3})^2}{2} = \frac{27π}{2}\ cm^2$$

Εμβαδόν σκιασμένου χωρίου:

$$E_{σκιασμ.} = \left(9\sqrt{3} + \frac{27π}{2}\right)\ cm^2$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ