ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025 - 2026

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ/ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΚΑΙ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΔΥΟ (2) ΣΕΛΙΔΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα**.
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο για σχήματα, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1 Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$.

Α2 Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int (x^3 - 5)dx$

(β) $\int (1 + 2x)^5 dx$

Α3 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1, \qquad x \in [-1,0]$$

(α) Να εξετάσετε κατά πόσον ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-1,0]$.

(Μονάδες 4)

(β) Στην περίπτωση που ικανοποιούνται, να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του $\xi \in (-1,0)$ ώστε να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος.

(Μονάδες 6)

Α4 Δίνεται η λέξη **ΑΞΙΟΘΕΑΤΟ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(Μονάδες 3)

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν και τελειώνουν με **Α**;

(Μονάδες 3)

(γ) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς του υποερωτήματος (α), να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:
A: «Ο αναγραμματισμός αρχίζει με τη λέξη **ΑΞΙΟ** και περιέχει τη λέξη **ΘΕΑ**».

(Μονάδες 4)

A5 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Αν γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$e^x \geq x + 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(Μονάδες 4)

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(0, f(0)\big)$ είναι η:

$$(\varepsilon):\ y = x + 2$$

(Μονάδες 2)

(γ) Να αποδείξετε ότι:

$$e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \geq x + 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 4)

A6 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις g και h στο διάστημα $[-\kappa, \kappa]$, $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$g(-x) = g(x),\ \ \forall\, x \in [-\kappa, \kappa] \ \text{ και } \ h(-x) = -h(x),\ \ \forall\, x \in [-\kappa, \kappa]$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{g(x)}{e^{h(x)} + 1}\, dx = \int_{0}^{\kappa} g(x)\, dx$$

(Μονάδες 6)

(β) Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{e^{(x^3 + x)} + 1}\, dx$$

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

Μέρος Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Η άσκηση Β2 βαθμολογείται με 10 μονάδες, ενώ οι ασκήσεις Β1 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x(x-3)}{x+1}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά της ακρότατα.

(Μονάδες 7)

(β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=-1$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x-4$ όταν $x\to-\infty$ και $x\to+\infty$.

(Μονάδες 4)

(γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 4)

Β2 Οκτώ άτομα πρόκειται να καθίσουν σε 12 αριθμημένες θέσεις μιας σειράς καθισμάτων ενός θεάτρου. Τα δύο από αυτά αποτελούν ζευγάρι.

(α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 8 άτομα σε αυτές τις 12 αριθμημένες θέσεις.

(Μονάδες 3)

(β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(i) A: «Τα 8 άτομα μπορούν να καθίσουν τυχαία στις αριθμημένες θέσεις με την πρώτη και την τελευταία θέση να παραμένουν άδειες».

(Μονάδες 2)

(ii) B: «Το ζευγάρι να κάθεται στην τέταρτη και πέμπτη θέση».

(Μονάδες 3)

(iii) Γ: «Το ζευγάρι να κάθεται στην τέταρτη και πέμπτη θέση, αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη και η τελευταία θέση θα παραμείνουν άδειες».

(Μονάδες 2)

B3 Κύκλος (C), τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $A(1,0)$ και $B(5,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία με εξίσωση $3x + y = 10$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C).

(Μονάδες 5)

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (C) στο σημείο του $A(1,0)$, είναι η:

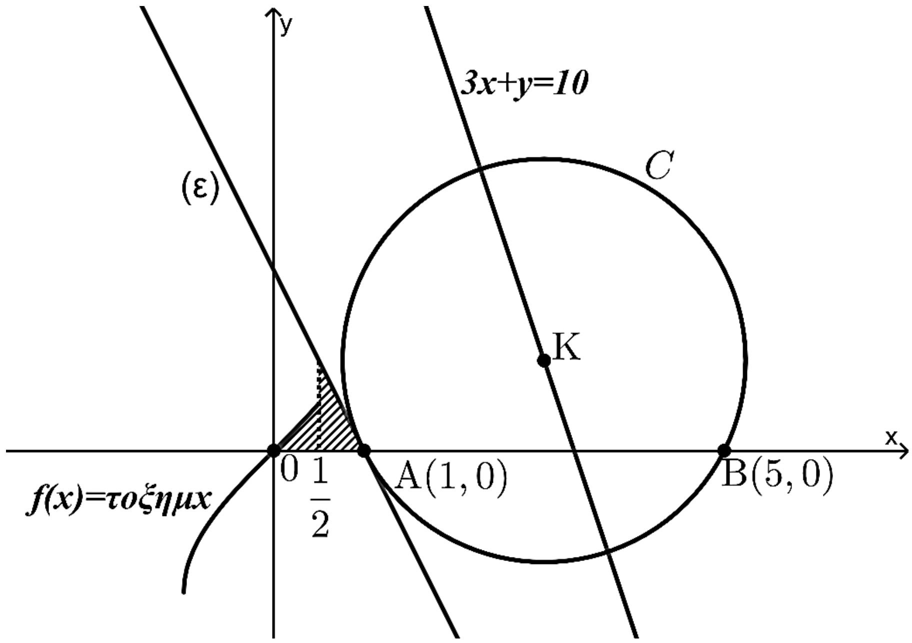
$$(\varepsilon):\ y = -2x + 2$$

(Μονάδες 2)

(γ) Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται το γραμμοσκιασμένο χωρίο T, το οποίο περικλείεται από τον άξονα των τετμημένων και τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \tau o\xi\eta\mu x$ στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και της ευθείας (ε): $y = -2x + 2$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου T είναι:

$$E = \frac{\pi + 6\sqrt{3} - 9}{12}\ \tau.\mu.$$

(Μονάδες 8)



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

1. Στατιστική

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\nu}} \quad ή \quad s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i{x_i}^2}{\nu}-\bar{x}^2},$$

όπου $\nu=\sum_{i=1}^{\kappa}f_i$

$$r=\frac{\Sigma_{xy}-\nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y},\ \text{όπου}\ \Sigma_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$$ημ(Α\pm Β)=ημΑσυνΒ\pm συνΑημΒ$$

$$συν(Α\pm Β)=συνΑσυνΒ\mp ημΑημΒ$$

$$2ημασυνβ=ημ(α-β)+ημ(α+β)$$

$$2συνασυνβ=συν(α-β)+συν(α+β)$$

$$2ημαημβ=συν(α-β)-συν(α+β)$$

$$ημ2α=2ημασυνα \qquad συν2α=συν^2α-ημ^2α$$

$$ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2} \qquad συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$$

$$ημ2α=\frac{2t}{1+t^2} \qquad συν2α=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t=εφα$$

$$ημΑ+ημΒ=2ημ\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2} \qquad ημΑ-ημΒ=2ημ\frac{Α-Β}{2}συν\frac{Α+Β}{2}$$

$$συνΑ+συνΒ=2συν\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2} \qquad συνΑ-συνΒ=2ημ\frac{Β-Α}{2}ημ\frac{Α+Β}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$ημx=ημα$	$x=360^oκ+α$ ή $x=360^oκ+180^o-α,\quad κ\in\mathbb{Z}$	$x=2πκ+α$ ή $x=2πκ+π-α,\quad κ\in\mathbb{Z}$
$συνx=συνα$	$x=360^oκ\pm α,\quad κ\in\mathbb{Z}$	$x=2πκ\pm α,\quad κ\in\mathbb{Z}$
$εφx=εφα$	$x=180^o\,κ+α,\quad κ\in\mathbb{Z}$	$x=πκ+α,\quad κ\in\mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$Eπ = Π_β \cdot υ$	$V = E_β \cdot υ$
Κανονική Πυραμίδα	$E_π = \frac{1}{2} Π_β \cdot h$	$V = \frac{E_β \cdot υ}{3}$
Κύλινδρος	$E_κ = 2πRυ$	$V = πR^2υ$
Κώνος	$E_κ = πRλ$	$V = \frac{πR^2υ}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_κ = π(R + ρ)λ$	$V = \frac{πυ}{3}(R^2 + Rρ + ρ^2)$
Σφαίρα	$E = 4πR^2$	$V = \frac{4πR^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1,y_1)$ από την ευθεία $Ax+By+Γ=0$: $d=\frac{|Ax_1+By_1+Γ|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Έλλειψη: $\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = 1, \quad γ = \sqrt{α^2 - β^2}, \quad α > β$

Εστίες (±γ,0), Διευθετούσες $x=\pm\frac{α}{ε}$, Εκκεντρότητα $ε=\frac{γ}{α}$

5. Παράγωγοι

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$(ημx)' = συνx$ $(συνx)' = -ημx$ $(εφx)' = τεμ^2x$ $(lnx)' = \frac{1}{x}$

6. Ολοκληρώματα

$\int τεμx\,dx = ln|τεμx + εφx| + c$ $\int στεμx\,dx = ln\left|εφ\frac{x}{2}\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{α^2 - x^2}} = τοξημ\frac{x}{α} + c$ $\int \frac{dx}{α^2 + x^2} = \frac{1}{α}τοξεφ\,\frac{x}{α} + c$

7. Απλός Τόκος

$$T=\frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$