ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025 - 2026

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ/ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΚΑΕΠΤΑ (17) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

Α1 Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=25$.

<u>Λύση:</u>

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(0,0)$ και ακτίνα R είναι η $x^2+y^2=R^2$.

Επομένως, το κέντρο του κύκλου $x^2+y^2=25$ είναι το σημείο $K(0,0)$ και η ακτίνα του κύκλου είναι $R=\sqrt{25}\Rightarrow R=5$ μονάδες.

Α2 Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int(x^3-5)dx$

(β) $\int(1+2x)^5dx$

<u>Λύση:</u>

(α)

$$\int(x^3-5)dx=\frac{x^4}{4}-5x+c$$

(β)

Α΄ τρόπος:

$$\int(1+2x)^5dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2x)^6}{6}+c=\frac{(1+2x)^6}{12}+c$$

Β΄ τρόπος:

$$\int(1+2x)^5dx=\frac{1}{2}\int(1+2x)^5d(1+2x)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2x)^6}{6}+c=\frac{(1+2x)^6}{12}+c$$

Γ΄ τρόπος:

Θέτουμε $1+2x=u$. Έτσι: $2dx=du\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$ και:

$$\int(1+2x)^5dx=\frac{1}{2}\int u^5du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^6}{6}+c$$
$$=\frac{(1+2x)^6}{12}+c$$

Α3 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1, \qquad x \in [-1,0]$$

(α) Να εξετάσετε κατά πόσον ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-1,0]$.

(Μονάδες 4)

(β) Στην περίπτωση που ικανοποιούνται, να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του $\xi \in (-1,0)$ ώστε να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος.

(Μονάδες 6)

<u>Λύση:</u>

(α) Για την $f(x) = x^3 + x^2 + 1,\ x \in [-1,0]$ ισχύουν τα εξής:

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$,
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ και
- $f(-1) = f(0) = 1$

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-1,0]$.

(β) Σύμφωνα με το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (-1,0)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$.
Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

Είναι:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi(3\xi + 2) = 0$$

$$\xi = 0 \notin (-1,0) \quad \text{ή} \quad \xi = -\frac{2}{3} \in (-1,0)$$

Επομένως, η τιμή $\xi = 0$ απορρίπτεται και η τιμή $\xi = -\frac{2}{3}$ είναι δεκτή.

Α4 Δίνεται η λέξη **ΑΞΙΟΘΕΑΤΟ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(Μονάδες 3)

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν και τελειώνουν με **Α**;

(Μονάδες 3)

(γ) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς του υποερωτήματος (α), να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:
A: «Ο αναγραμματισμός αρχίζει με τη λέξη **ΑΞΙΟ** και περιέχει τη λέξη **ΘΕΑ**».

(Μονάδες 4)

Λύση:

(α) Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{2! \cdot 2!} = \frac{362\,880}{4} = 90\,720$$

(β) Το πλήθος των αναγραμματισμών που αρχίζουν και τελειώνουν με **Α** είναι:

$$M_7^{\varepsilon} = \frac{7!}{2!} = \frac{5\,040}{2} = 2\,520$$

(γ) Ο δειγματικός χώρος Ω είναι:
Ω: «Οι αναγραμματισμοί της λέξης **ΑΞΙΟΘΕΑΤΟ**»
Από το υποερώτημα (α) είναι,

$$\nu(\Omega) = 90\,720$$

Υπολογισμός του $\nu(A)$:
Στην πρώτη φάση τοποθετούμε τη λέξη **ΑΞΙΟ** στις πρώτες θέσεις. Αυτό γίνεται με έναν μόνο τρόπο. Στη συνέχεια, σε δεύτερη φάση, θεωρούμε τη λέξη **ΘΕΑ** ως ένα αντικείμενο και σχηματίζουμε αναγραμματισμούς μαζί με τα υπόλοιπα γράμματα **Τ** και **Ο.** Το πλήθος των αναγραμματισμών είναι ίσο με:

$$\nu(A) = M_3 = 3! = 6$$

Επομένως:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{6}{90\,720} = \frac{1}{15\,120}$$

Α5 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Αν γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$e^x \geq x + 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(Μονάδες 4)

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(0, f(0)\big)$ είναι η:

$$(\varepsilon):\ y = x + 2$$

(Μονάδες 2)

(γ) Να αποδείξετε ότι:

$$e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \geq x + 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 4)

<u>Λύση:</u>

(α) Η συνάρτηση f έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$.
Βρίσκουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f'(x) = e^x - \frac{3x^2}{6} - \frac{2x}{2} \Rightarrow f'(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x,\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = e^x - \frac{2x}{2} - 1 \Rightarrow f''(x) = e^x - x - 1,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$e^x \geq x + 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$f''(x) = e^x - x - 1 \geq 0,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(β) Για την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) χρειαζόμαστε ένα σημείο της και την κλίση της.
Σημείο: $A\big(0, f(0)\big)$

$$f(0) = e^0 - \frac{0}{6} - \frac{0}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow A(0,2)$$

Κλίση:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi.} = f'(0) = e^0 - \frac{0}{2} - 0 = 1$$

Εξίσωση εφαπτομένης (ε):

$$y - y_A = \lambda_{\varepsilon\varphi.}(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 2 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = x$$

$$\Leftrightarrow y = x + 2\ \ \text{(αποδείχθηκε)}$$

(γ) Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, τότε το διάγραμμά της βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της στο $\mathbb{R}$, εκτός από το σημείο επαφής. Άρα, ισχύει:

$$f(x) \geq y_{\varepsilon\varphi.}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1 \geq x + 2$$
$$\Leftrightarrow e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \geq x + 2 - 1$$
$$\Leftrightarrow e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \geq x + 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(αποδείχθηκε)

Α6 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις g και h στο διάστημα $[-\kappa, \kappa]$, $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$g(-x) = g(x), \ \forall\, x \in [-\kappa, \kappa] \ \text{και} \ h(-x) = -h(x), \ \forall\, x \in [-\kappa, \kappa]$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{g(x)}{e^{h(x)} + 1}\,dx = \int_{0}^{\kappa} g(x)\,dx$$

(Μονάδες 6)

(β) Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{e^{(x^3+x)} + 1}\,dx$$

(Μονάδες 4)

<u>Λύση:</u>

(α) Είναι:

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{g(x)}{e^{h(x)} + 1}\,dx = \int_{-\kappa}^{0} \frac{g(x)}{e^{h(x)} + 1}\,dx + \int_{0}^{\kappa} \frac{g(x)}{e^{h(x)} + 1}\,dx$$

Για το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\kappa}^{0} \frac{g(x)}{e^{h(x)} + 1}\,dx$$

Θέτουμε $x = -u \Rightarrow dx = -du$.

Για $x = -\kappa \Rightarrow u = \kappa$ και για $x = 0 \Rightarrow u = 0$.

Έτσι:

$$\int_{-\kappa}^{0} \frac{g(x)}{e^{h(x)}+1}\,dx = \int_{\kappa}^{0} \frac{g(-u)}{e^{h(-u)}+1}(-\,du) = \int_{0}^{\kappa} \frac{g(-u)}{e^{h(-u)}+1}\,du$$

$$= \int_{0}^{\kappa} \frac{g(u)}{e^{-h(u)}+1}\,du \qquad (g(-u) = g(u), h(-u) = -h(u), \forall\, u \in [-\kappa,\kappa])$$

$$= \int_{0}^{\kappa} \frac{g(x)}{e^{-h(x)}+1}\,dx = \int_{0}^{\kappa} \frac{g(x)}{\frac{1}{e^{h(x)}}+1}\,dx = \int_{0}^{\kappa} \frac{g(x)}{\frac{1+e^{h(x)}}{e^{h(x)}}}\,dx = \int_{0}^{\kappa} \frac{e^{h(x)}g(x)}{1+e^{h(x)}}\,dx$$

Επομένως:

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{g(x)}{e^{h(x)}+1}\,dx = \int_{0}^{\kappa} \frac{e^{h(x)}g(x)}{1+e^{h(x)}}\,dx + \int_{0}^{\kappa} \frac{g(x)}{e^{h(x)}+1}\,dx$$

$$= \int_{0}^{\kappa} \frac{e^{h(x)}g(x)+g(x)}{e^{h(x)}+1}\,dx = \int_{0}^{\kappa} \frac{g(x)\left(e^{h(x)}+1\right)}{e^{h(x)}+1}\,dx = \int_{0}^{\kappa} g(x)\,dx$$

(αποδείχθηκε)

(β) Έστω, $g(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$ και $h(x) = x^3 + x$. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις g και h είναι συνεχείς στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ και ισχύουν οι υποθέσεις:

$$g(-x) = \sigma\upsilon\nu^3(-x) = \big(\sigma\upsilon\nu(-x)\big)^3 = (\sigma\upsilon\nu x)^3 = \sigma\upsilon\nu^3 x = g(x),\ \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$$

$$h(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3+x) = -h(x),\ \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$$

Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα του υποερωτήματος (α) για $\kappa = \frac{\pi}{6}$, έχουμε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{e^{(x^3+x)}+1}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (1-\eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (1-\eta\mu^2 x)\,d(\eta\mu x) = \left[\eta\mu x - \frac{\eta\mu^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\eta\mu^3\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3}\right) - \left(\eta\mu 0 - \frac{\eta\mu^3 0}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} - 0 = \frac{11}{24}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

Μέρος Β΄:

Β1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x(x-3)}{x+1}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά της ακρότατα.

(Μονάδες 7)

(β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=-1$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x-4$ όταν $x\to-\infty$ και $x\to+\infty$.

(Μονάδες 4)

(γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 4)

<u>Λύση:</u>

(α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων.
Αν $x=0$, τότε $y=0$
Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Έχουμε ότι:

$$\frac{x(x-3)}{x+1}=0,\ \ x\neq-1$$
$$\Rightarrow x(x-3)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ ή } x=3$$

Επομένως, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα:

$$(0,0) \text{ και } (3,0)$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f και λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$. Έχουμε ότι:

$$f(x)=\frac{x(x-3)}{x+1}=\frac{x^2-3x}{x+1}$$

Οπότε:

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-3x-3-x^2+3x}{(x+1)^2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow(x+3)(x-1)=0 \text{ και } x\neq-1$$
$$\Rightarrow x=-3 \text{ ή } x=1$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$ $\quad$ -3 $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ ‖ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	↗ $\quad$ ↘ ‖ ↘ $\quad$ ↗

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-3]$ και $[1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-3,-1)$ και $(-1,1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-3$, το $f(-3)=\frac{-3(-3-3)}{-3+1}=-9$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=\frac{1(1-3)}{1+1}=-1$.

(β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-1\}$, ως ρητή, επομένως θα αποδείξουμε την ύπαρξη των ασύμπτωτων.

Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Για $x<-1$, ισχύει:

$$x+1<0 \text{ και } \lim_{x\to -1^-}(x+1)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x(x-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\big(x(x-3)\big)\cdot\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}=4\cdot(-\infty)=-\infty$$

Για $x>-1$, ισχύει:

$$x+1>0 \text{ και } \lim_{x\to -1^+}(x+1)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x(x-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\big(x(x-3)\big)\cdot\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=4\cdot(+\infty)=+\infty$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=-1$. (αποδείχθηκε)

Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y=x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη. Ελέγχουμε την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης, όταν $x\to-\infty$ και $x\to+\infty$.

Α΄ τρόπος:

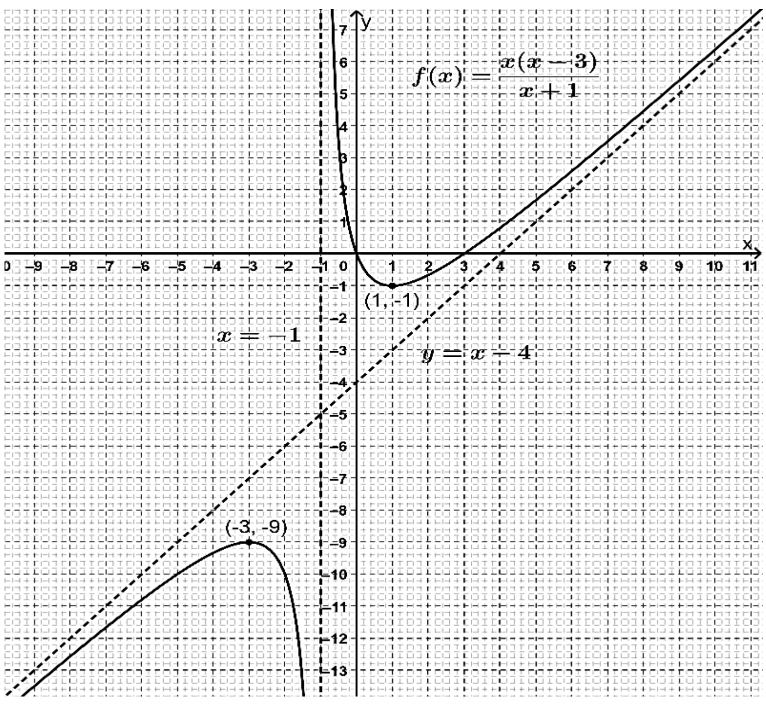
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-x^2-x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x}=\lim_{x\to-\infty}(-4)=-4=\beta$$
Ομοίως:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1=\lambda,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=-4=\beta$$
Επομένως, η ευθεία $y=x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν $x\to-\infty$ και $x\to+\infty$. (αποδείχθηκε)

Β΄ τρόπος:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(\lambda x+\beta))=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(\lambda x+\beta))=0$$
Πράγματι:
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x(x-3)}{x+1}-(x-4)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x-x^2+4x-x+4}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)=0$$
Ομοίως:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(x-3)}{x+1}-(x-4)\right)=0$$
Επομένως, η ευθεία $y=x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν $x\to-\infty$ και $x\to+\infty$. (αποδείχθηκε)

(γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται πιο κάτω:



Β2 Οκτώ άτομα πρόκειται να καθίσουν σε 12 αριθμημένες θέσεις μιας σειράς καθισμάτων ενός θεάτρου. Τα δύο από αυτά αποτελούν ζευγάρι.

(α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 8 άτομα σε αυτές τις 12 αριθμημένες θέσεις.

(Μονάδες 3)

(β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(i) A: «Τα 8 άτομα μπορούν να καθίσουν τυχαία στις αριθμημένες θέσεις με την πρώτη και την τελευταία θέση να παραμένουν άδειες».

(Μονάδες 2)

(ii) B: «Το ζευγάρι να κάθεται στην τέταρτη και πέμπτη θέση».

(Μονάδες 3)

(iii) Γ: «Το ζευγάρι να κάθεται στην τέταρτη και πέμπτη θέση, αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη και η τελευταία θέση θα παραμείνουν άδειες».

(Μονάδες 2)

<u>Λύση:</u>

(α) **Α΄ τρόπος:**

Όλοι οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των 8 ατόμων στις 12 αριθμημένες θέσεις, ισούνται με το πλήθος των διατάξεων των 12 ανά 8.

Δηλαδή, έχουμε $\Delta_8^{12} = \frac{12!}{(12-8)!} = 19\,958\,400$ διαφορετικούς τρόπους.

Β΄ τρόπος:

Η επιλογή των θέσεων πραγματοποιείται σε 8 φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή της θέσης από το πρώτο άτομο, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 12 τρόπους, διότι υπάρχουν 12 διαθέσιμες θέσεις. Η δεύτερη φάση είναι η επιλογή της θέσης από το δεύτερο άτομο, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 11 τρόπους, διότι υπάρχουν 11 διαθέσιμες θέσεις. Ομοίως και για τα υπόλοιπα άτομα.

Φάσεις	1° άτομο	2° άτομο	3° άτομο	4° άτομο	5° άτομο	6° άτομο	7° άτομο	8° άτομο
Τρόποι	12	11	10	9	8	7	6	5

Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η επιλογή των 8 θέσεων μπορεί να πραγματοποιηθεί με
$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19\,958\,400$ διαφορετικούς τρόπους.

Γ΄ τρόπος:

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή των 8 από τις 12 αριθμημένες θέσεις. Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση των 8 ατόμων στις θέσεις αυτές.

Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά
$\binom{12}{8}\cdot M_8 = \frac{12!}{(12-8)!\cdot 8!}\cdot 8! = 19\,958\,400$ διαφορετικοί τρόποι.

(β)

(i) Ο δειγματικός χώρος Ω είναι:

Ω: «Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να καθίσουν τα 8 άτομα στις 12 αριθμημένες θέσεις».

Έχουμε το ενδεχόμενο:

A: «Τα 8 άτομα μπορούν να καθίσουν τυχαία στις αριθμημένες θέσεις με την πρώτη και την τελευταία θέση να παραμένουν άδειες»

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}$$

Από το υποερώτημα (α) έχουμε ότι $\nu(\Omega) = 19\,958\,400$

Υπολογισμός του $\nu(A)$:

Αφού η πρώτη και η τελευταία θέση θα παραμείνουν άδειες, τότε όλοι οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των 8 ατόμων στις υπόλοιπες 10 διαθέσιμες θέσεις, ισούνται με το πλήθος των διατάξεων των 10 ανά 8.

$$\nu(A) = \Delta_8^{10} = \frac{10!}{(10-8)!} = 1\,814\,400$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{1\,814\,400}{19\,958\,400} = \frac{1}{11}$$

ή διαφορετικά:

<u>Υπολογισμός του $\nu(A)$:</u>

Η επιλογή των θέσεων πραγματοποιείται σε 8 φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή της θέσης από το πρώτο άτομο, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 10 τρόπους, διότι υπάρχουν 10 διαθέσιμες θέσεις. Η δεύτερη φάση είναι η επιλογή της θέσης από το δεύτερο άτομο, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 9 τρόπους, διότι υπάρχουν 9 διαθέσιμες θέσεις. Ομοίως και για τα υπόλοιπα άτομα.

Φάσεις	1º άτομο	2º άτομο	3º άτομο	4º άτομο	5º άτομο	6º άτομο	7º άτομο	8º άτομο
Τρόποι	10	9	8	7	6	5	4	3

Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η επιλογή των 8 θέσεων μπορεί να πραγματοποιηθεί με $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1\,814\,400$ διαφορετικούς τρόπους.

$$\nu(A) = 1\,814\,400$$

ή διαφορετικά:

Υπολογισμός του $\nu(A)$:

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή των 8 από τις 10 διαθέσιμες αριθμημένες θέσεις. Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση των 8 ατόμων στις θέσεις αυτές.

Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά $\binom{10}{8} \cdot M_8 = \frac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} \cdot 8! = 1\,814\,400$ διαφορετικοί τρόποι.

$$\nu(A) = 1\,814\,400$$

(ii) Έχουμε το ενδεχόμενο:

B: «Το ζευγάρι να κάθεται στην τέταρτη και πέμπτη θέση».

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)}$$

Από το υποερώτημα (α) έχουμε ότι $\nu(\Omega) = 19\,958\,400$

Υπολογισμός του $\nu(B)$:

Αφού το ζευγάρι θα καθίσει σε δύο συγκεκριμένες θέσεις, τότε η τοποθέτηση τους μπορεί να γίνει με 2 τρόπους. Όλοι οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των άλλων 6 ατόμων στις υπόλοιπες 10 διαθέσιμες θέσεις ισούνται με το πλήθος των διατάξεων των 10 ανά 6. Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά

$$\nu(B) = M_2 \cdot \Delta_6^{10} = 2 \cdot \frac{10!}{(10-6)!} = 302\,400$$

Επομένως, έχουμε:

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{302\,400}{19\,958\,400} = \frac{1}{66}$$

ή διαφορετικά:

Υπολογισμός του $\nu(B)$:

Αφού το ζευγάρι θα καθίσει σε δύο συγκεκριμένες θέσεις, τότε η τοποθέτηση τους μπορεί να γίνει με 2 τρόπους. Για την τοποθέτηση των άλλων 6 ατόμων στις 10 διαθέσιμες θέσεις, σε πρώτη φάση θα γίνει η επιλογή των 6 θέσεων από τις 10 και μετά η τοποθέτηση τους σε αυτές. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά

$$\nu(B) = M_2 \cdot \binom{10}{6} \cdot M_6 = 2 \cdot \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 6! = 302\,400$$

διαφορετικοί τρόποι.

(iii) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\varGamma) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Από το υποερώτημα (β)(i) έχουμε ότι:

$$P(A) = \frac{1}{11}$$

$$P(B \cap A) = \frac{\nu(B \cap A)}{\nu(\varOmega)}$$

Υπολογισμός του $\nu(B \cap A)$:

Όλοι οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των άλλων 6 ατόμων στις υπόλοιπες 8 διαθέσιμες θέσεις ισούνται με το πλήθος των διατάξεων των 8 ανά 6. Το ζευγάρι θα καθίσει στην τέταρτη και πέμπτη θέση με 2 τρόπους. Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, υπάρχουν συνολικά

$\nu(B \cap A) = M_2 \cdot \varDelta_6^8 = 2 \cdot \frac{8!}{(8-6)!} = 40\,320$ διαφορετικοί τρόποι.

Άρα:

$$P(B \cap A) = \frac{40320}{19\,958\,400} = \frac{1}{495}$$

Συνεπώς,

$$P(\varGamma) = \frac{\frac{1}{495}}{\frac{1}{11}} = \frac{11}{495} = \frac{1}{45}$$

ή διαφορετικά:

$$P(\varGamma) = \frac{\nu(B \cap A)}{\nu(A)} = \frac{40\,320}{1\,814\,400} = \frac{1}{45}$$

Β3 Κύκλος (C), τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $A(1,0)$ και $B(5,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία με εξίσωση $3x + y = 10$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C). **(Μονάδες 5)**

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (C) στο σημείο του $A(1,0)$, είναι η:

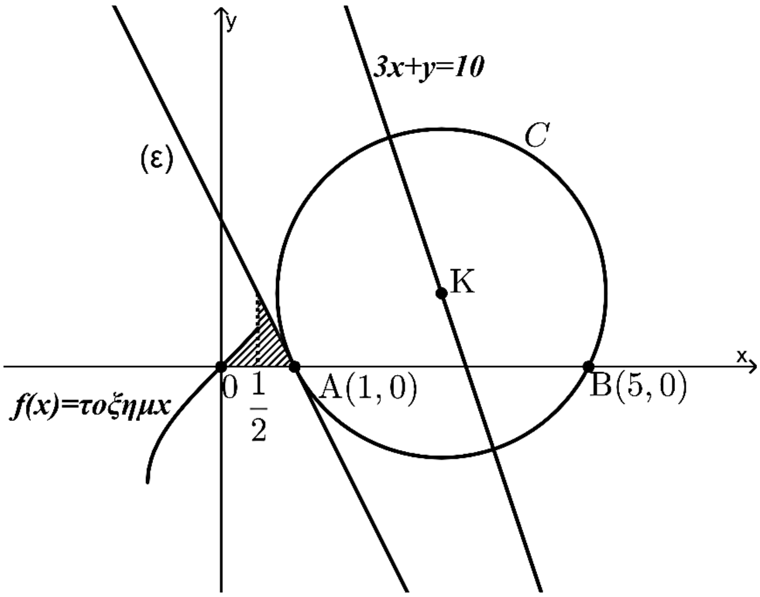
$$(\varepsilon):\ y = -2x + 2$$

(Μονάδες 2)

(γ) Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται το γραμμοσκιασμένο χωρίο T, το οποίο περικλείεται από τον άξονα των τετμημένων και τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = τοξημx$ στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και της ευθείας (ε): $y = -2x + 2$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου T είναι:

$$E = \frac{\pi + 6\sqrt{3} - 9}{12}\ τ.μ.$$

(Μονάδες 8)



Λύση:

(α) Έστω M μέσο της χορδής AB. Τότε KM είναι μεσοκάθετος της χορδής AB. Άρα:

$$x_K = x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Το κέντρο K βρίσκεται στην ευθεία $3x + y = 10$, οπότε επαληθεύει την εξίσωσή της. Έτσι:

$$3 \cdot 3 + y_K = 10 \Rightarrow y_K = 10 - 9 = 1$$

Επομένως, το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(3,1)$.

Η ακτίνα R του κύκλου (C) είναι ίση με:
$R = (KA) = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$ μονάδες

Συνεπώς, η εξίσωση του κύκλου (C) είναι:
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$$

ή διαφορετικά:
Υπολογισμός της τετμημένης του κέντρου του κύκλου:
Έστω $K(\alpha, \beta)$
Ισχύει ότι $KA = KB = R$.
Επομένως:
$$\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\beta-0)^2} = \sqrt{(\alpha-5)^2 + (\beta-0)^2}$$
$$\Rightarrow (\alpha-1)^2 + (\beta-0)^2 = (\alpha-5)^2 + (\beta-0)^2$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 = \alpha^2 - 10\alpha + 25 + \beta^2$$
$$\Rightarrow -2\alpha + 1 = -10\alpha + 25 \Rightarrow 8\alpha = 24 \Rightarrow \alpha = 3$$

(β) Η κλίση της ευθείας στην οποία βρίσκεται η ακτίνα AK είναι:
$$\lambda_{AK} = \frac{y_K - y_A}{x_K - x_A} = \frac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$$

Επομένως, η κλίση της εφαπτομένης (ε) είναι:
$$\lambda_{(\varepsilon)} = -\frac{1}{\lambda_{AK}} = -2$$
Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:
$$y - y_A = \lambda_{(\varepsilon)}(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -2(x-1)$$
$$\Rightarrow y = -2x + 2 \text{ (αποδείχθηκε)}$$

ή διαφορετικά:
Εύρεση κλίσης της ευθείας (ε):
Η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης που ορίζεται από την εξίσωση του κύκλου (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ είναι:
$$2(x-3) + 2(y-1)\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-3}{y-1}, \ y \neq 1$$
Άρα, η κλίση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ στο σημείο του $A(1,0)$ είναι η:
$$\lambda_{(\varepsilon)} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{A(1,0)} = -\frac{1-3}{0-1} = -2$$

(γ) **Α΄ τρόπος:**

Το εμβαδόν του χωρίου T είναι:

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}} τοξημx\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-2x+2)\,dx$$

$$=[xτοξημx]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}} x\,d(τοξημx)+[-x^2+2x]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}τοξημ\left(\frac{1}{2}\right)-0\cdot τοξημ(0)-\int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+(-1^2+2\cdot 1)-\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx+1-\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{\pi}{12}+\int_0^{\frac{1}{2}} d\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\pi}{12}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{12}+\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{1-0}\right)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{\pi+6\sqrt{3}-9}{12}\ τ.μ.$$

(αποδείχθηκε)

ή διαφορετικά:

<u>Υπολογισμός του ολοκληρώματος</u>

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)=\left[-\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

Β΄ τρόπος:

$$E=\int_{0}^{\frac{1}{2}} τοξημx\,dx+E_{τριγώνου}$$

$E_{τριγώνου}=\frac{1}{2}\cdot βάση\cdot ύψος$

Το μήκος της βάσης είναι $\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\ μ.$

Βρίσκουμε το μήκος του ύψους, αντικαθιστώντας την τιμή $x=\frac{1}{2}$ στην εξίσωση της ευθείας $(ε)$: $y=-2x+2\Rightarrow y=-2\cdot\frac{1}{2}+2=1$

Το μήκος του ύψους είναι $|1|=1\ μ.$

$$\Rightarrow E_{τριγώνου}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}\ τ.μ.$$

Οπότε έχουμε:

$$E=\int_{0}^{\frac{1}{2}} τοξημx\,dx+E_{τριγώνου}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{1}{4}=\frac{\pi+6\sqrt{3}-9}{12}\ τ.μ.$$

(αποδείχθηκε)

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ