

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-2026

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ / ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΚΑΙ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΙΑΣ (1) ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση και μόνο για σχήματα και γραφικές παραστάσεις.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

A1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

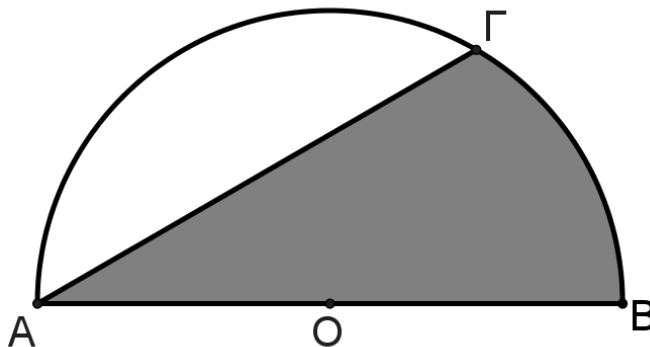
(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^2 + 1)$

(β) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 2x}{x + 2} \right)$

A2. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\phi x$$

A3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με ακτίνα $R = OA$ και χορδή $AG = \lambda_3$. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου συναρτήσεως του R .



A4. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

(β) $\log_2(x + 5) + \log_2(x - 2) = 3$

(Μονάδες 4)

(Μονάδες 6)

A5. Η ένταση του σήματος που λαμβάνει ένα κινητό τηλέφωνο από μια κεραία μεταβάλλεται με τον χρόνο και δίνεται από τη συνάρτηση:

$$S(t) = \sqrt{3}\eta\mu(2t) + \sigma\upsilon\nu(2t)$$

όπου t είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και $S(t)$ η ένταση του σήματος σε dBm.

(α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του σήματος ως προς τον χρόνο.

(β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής στο διάστημα $[0, \pi]$.

A6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x| - 4}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή ή κανένα από τα δύο στο πεδίο ορισμού της.

**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες.

B1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 0$ και τεταγμένη θετική. **(Μονάδες 6)**

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία έχει κλίση ίση με -1 . **(Μονάδες 4)**

B2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [3, +\infty) \rightarrow (3, 9]$ και $g: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους:

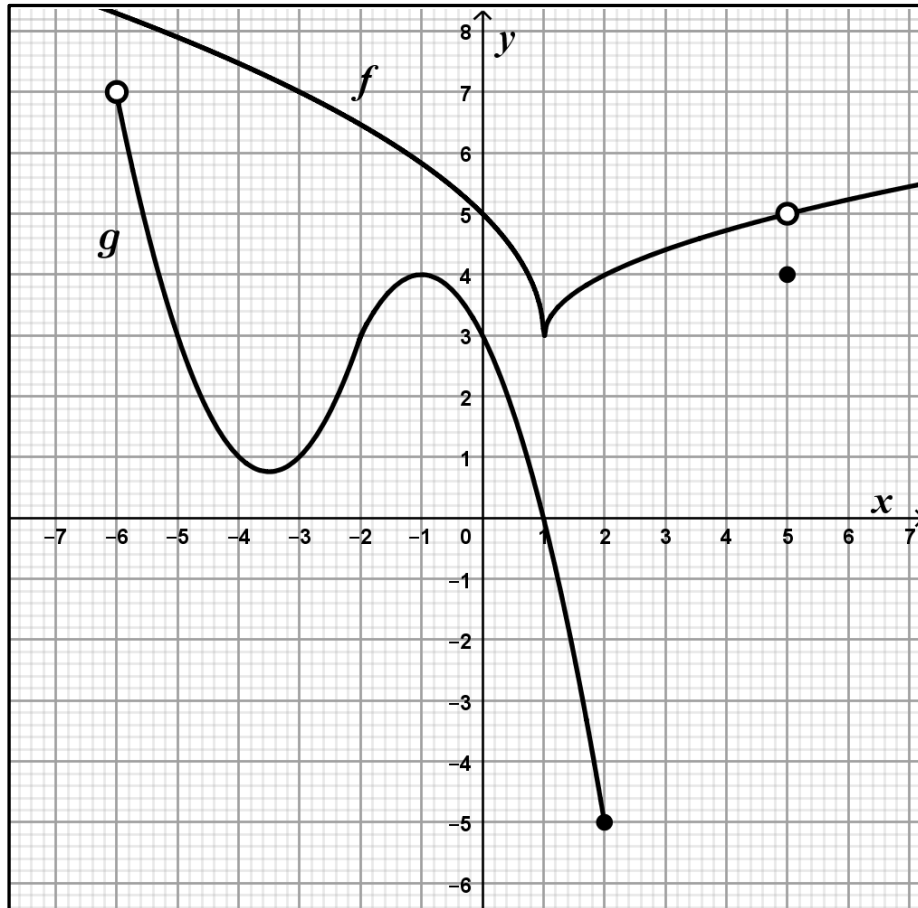
$$f(x) = \frac{3x}{x-2}, x \in [3, +\infty) \text{ και } g(x) = \sqrt{25 - x^2}, x \in [-5, 5]$$

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και, στην περίπτωση που είναι, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της, f^{-1} .

(γ) Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Στην περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.

- B3.** Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (-6, 2] \rightarrow g((-6, 2])$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο της με τετμημένη $x = -1$.



- (α) i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .
 ii) Να υπολογίσετε τις τιμές $(f + g)(2)$ και $(f \cdot g)(1)$.
 iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$. **(Μονάδες 1 / 2 / 1)**
- (β) i) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη.
 ii) Να βρείτε την τιμή $g'(-1)$. **(Μονάδες 4 / 2)**
- (γ) i) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.
 ii) Ορίζεται η συνάρτηση $h: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) + g(x)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-3, 2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. **(Μονάδες 3 / 2)**

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta \pm \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha \pm \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta \mp \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$$

$$2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$$