ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-2026

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ / ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Β037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΚΑ (10) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Α1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 3x^2 + 1)$

(β) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2 + 2x}{x + 2} \right)$

Λύση

(α) $\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \to +\infty} (x^4) = +\infty$

(β) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2 + 2x}{x + 2} \right) = \lim_{x \to -2} \left[\frac{x(x + 2)}{x + 2} \right] = \lim_{x \to -2} x = -2$

Α2. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\text{ημ}2x}{1 + \text{συν}2x} = \text{εφ}x$$

Λύση

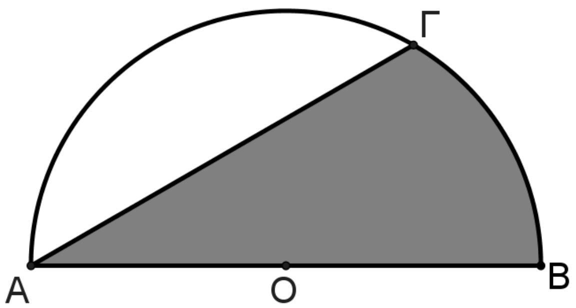
Α΄ τρόπος:

$$\begin{aligned}
\text{Α΄ μέλος} &= \frac{\text{ημ}2x}{1 + \text{συν}2x} \\
&= \frac{2\text{ημ}x\ \text{συν}x}{1 + 2\text{συν}^2x - 1} \\
&= \frac{2\text{ημ}x\ \text{συν}x}{2\text{συν}^2x} \\
&= \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x} = \text{εφ}x = \text{Β΄ μέλος}
\end{aligned}$$

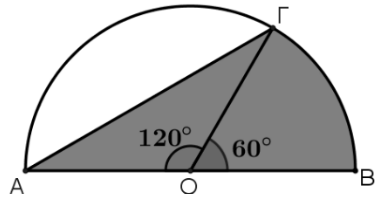
Β΄ τρόπος:

$$\begin{aligned}
\text{Α΄ μέλος} &= \frac{\text{ημ}2x}{1 + \text{συν}2x} \\
&= \frac{\frac{2\text{εφ}x}{1 + \text{εφ}^2x}}{1 + \frac{1 - \text{εφ}^2x}{1 + \text{εφ}^2x}} \\
&= \frac{\frac{2\text{εφ}x}{1 + \text{εφ}^2x}}{\frac{1 + \text{εφ}^2x + 1 - \text{εφ}^2x}{1 + \text{εφ}^2x}} \\
&= \frac{\frac{2\text{εφ}x}{1 + \text{εφ}^2x}}{\frac{2}{1 + \text{εφ}^2x}} = \text{εφ}x = \text{Β΄ μέλος}
\end{aligned}$$

Α3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με ακτίνα $R = OA$ και χορδή $AΓ = λ_3$. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου συναρτήσει του R.



Λύση



Επειδή $AΓ = λ_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow A\hat{O}Γ = 120°$

Α΄ τρόπος:

Αφού $A\hat{O}Γ = 120° \Rightarrow Γ\hat{O}B = 60°$ (παραπληρωματικές γωνίες)

$$E_{σκιασμένου\ χωρίου} = E_{\overset{\triangle}{OAΓ}} + E_{τομ(OΓB)}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot ημ120° + \frac{πR^2 \cdot 60°}{360°}$$
$$= \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{πR^2}{6}$$
$$= \frac{3R^2\sqrt{3} + 2πR^2}{12} = \frac{R^2}{12}\left(3\sqrt{3} + 2π\right) \text{ τ.μ.}$$

Β΄ τρόπος:

$$E_{σκιασμένου\ χωρίου} = E_{ημικυκλίου} - E_{κ.\ τμήματος}$$
$$= E_{ημικυκλίου} - \left(E_{τομ(OAΓ)} - E_{\overset{\triangle}{OAΓ}}\right)$$
$$= \frac{πR^2}{2} - \left(\frac{πR^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot ημ120°\right)$$
$$= \frac{πR^2}{2} - \left(\frac{πR^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{πR^2}{2} - \frac{πR^2}{3} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{6πR^2 - 4πR^2 + 3R^2\sqrt{3}}{12}$$
$$= \frac{2πR^2 + 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{R^2}{12}\left(2π + 3\sqrt{3}\right) \text{ τ.μ.}$$

Α4. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ **(Μονάδες 4)**

(β) $\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3$ **(Μονάδες 6)**

Λύση

(α) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (3^2)^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ Θέτουμε όπου $3^x = \omega,\ \omega > 0$

$\Rightarrow \omega^2 - 4\omega + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\omega - 3)(\omega - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \omega = 3$ ή $\omega = 1$

$\Rightarrow 3^x = 3$ $\quad 3^x = 1$

$\Rightarrow x = 1$ $\quad 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

(β) Περιορισμοί:

$$\left.\begin{array}{l} x+5>0 \Leftrightarrow x>-5 \\ x-2>0 \Leftrightarrow x>2 \end{array}\right\} \Rightarrow x>2$$

$\log_2(x+5) + \log_2(x-2) = 3 \Rightarrow \log_2[(x+5)(x-2)] = 3$

$\Leftrightarrow (x+5)(x-2) = 2^3$

Εναλλακτικά:

$\log_2[(x+5)(x-2)] = \log_2 8$

$(x+5)(x-2) = 8$

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι $1-1$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow (x+6)(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = -6$ ή $x = 3$

(απορρίπτεται) (δεκτή)

Η λύση $x = 3$ είναι δεκτή, αφού είναι η μοναδική που ικανοποίει τον περιορισμό $x > 2$.

Α5. Η ένταση του σήματος που λαμβάνει ένα κινητό τηλέφωνο από μια κεραία μεταβάλλεται με τον χρόνο και δίνεται από τη συνάρτηση:

$$S(t)=\sqrt{3}\text{ημ}(2t)+\text{συν}(2t)$$

όπου t είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και $S(t)$ η ένταση του σήματος σε dBm.

(α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του σήματος ως προς τον χρόνο.

(β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής στο διάστημα $[0,\pi]$.

Λύση

(α) Για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του σήματος παραγωγίζουμε τον τύπο της συνάρτησης $S(t)=\sqrt{3}\text{ημ}(2t)+\text{συν}(2t)$ ως προς t.

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}S'(t)&=\sqrt{3}\text{συν}(2t)\cdot(2t)'-\text{ημ}(2t)\cdot(2t)'\\&=2\sqrt{3}\text{συν}(2t)-2\text{ημ}(2t)\end{aligned}$$

(β) $S'(t)=0 \ \Rightarrow 2\sqrt{3}\,\text{συν}(2t)-2\text{ημ}(2t)=0$ (1)

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,\text{συν}(2t)=2\text{ημ}(2t)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{\text{ημ}(2t)}{\text{συν}(2t)} \qquad \text{συν}(2t)\neq 0, \text{ λόγω της σχέσης (1)}$$

$$\Leftrightarrow \text{εφ}(2t)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{εφ}(2t)=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2t=\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{6}, \qquad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Για $\kappa=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\ \mathrm{s}$

Για $\kappa=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}\ \mathrm{s}$

Η ένταση του σήματος μηδενίζεται για $t=\frac{\pi}{6}\ \mathrm{s}$ και $t=\frac{2\pi}{3}\ \mathrm{s}$.

Α6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{|x|-4}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή ή κανένα από τα δύο στο πεδίο ορισμού της.

Λύση

(α) $|x| - 4 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases}$

Επομένως, $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 4\}$

(β) $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{\pm 4\}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R} - \{\pm 4\}$ και

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 9}{|-x| - 4} = \frac{x^2 - 9}{|x| - 4} = f(x)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια στο $\mathbb{R} - \{\pm 4\}$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες.

Β1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη $x = 0$ και τεταγμένη θετική. **(Μονάδες 6)**

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία έχει κλίση ίση με -1. **(Μονάδες 4)**

Λύση

(α) $x^2 - xy + y^2 = 9$

για $x = 0 \Rightarrow\ y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3\ \ (y > 0)$

$\Rightarrow y = 3\ \Rightarrow$ Σημείο της καμπύλης: $(0, 3)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(9)$$

$$\Rightarrow 2x - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $(0,3)$ είναι:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,3)} = \frac{3-0}{2\cdot 3-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $(0,3)$ είναι:

$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 0)$

$\Leftrightarrow 2y - 6 = x$

$\Leftrightarrow x - 2y + 6 = 0$

(β) Η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο σημείο (α,β) έχει κλίση ίση με -1, άρα:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\alpha,\beta)} = -1 \Rightarrow \frac{\beta-2\alpha}{2\beta-\alpha} = -1 \Leftrightarrow \beta - 2\alpha = -2\beta + \alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Το σημείο (α,β) ανήκει στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$

$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 9$ όμως $\alpha = \beta$

$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^2 = 9$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = 9$

$\Leftrightarrow \alpha = 3$ ή $\alpha = -3$

$\Rightarrow \beta = 3$ $\quad \beta = -3$

Συνεπώς, τα σημεία της καμπύλης στα οποία η εφαπτομένη έχει κλίση ίση με -1 είναι τα $(3,3)$, $(-3,-3)$

B2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [3,+\infty) \longrightarrow (3,9]$ και $g: [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}, x \in [3,+\infty) \text{ και } g(x) = \sqrt{25-x^2}, x \in [-5,5]$$

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και, στην περίπτωση που είναι, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της, f^{-1}.

(γ) Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Στην περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της.

Λύση

(α) Μετασχηματίζουμε τον τύπο $y = \dfrac{3x}{x-2}$ ως προς x και παίρνουμε:

$$y = \frac{3x}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = 3x$$

$$\Leftrightarrow yx - 2y = 3x$$

$$\Leftrightarrow yx - 3x = 2y$$

$$\Leftrightarrow x(y-3) = 2y$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y}{y-3}, \qquad y \neq 3$$

Ελέγχουμε για ποιες τιμές του y ισχύει $x \geq 3$.

Έχουμε ότι:

$$\frac{2y}{y-3} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2y}{y-3} - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y - 3y + 9}{y-3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-y+9}{y-3} \geq 0$$

Η ρίζα του αριθμητή είναι $y = 9$, και το κλάσμα δεν ορίζεται για $y = 3$.

y	$-\infty$	3		9	$+\infty$
$\frac{-y+9}{y-3}$	$-$	‖	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow y \in (3, 9] \quad \Rightarrow R_f = (3, 9]$$

(β) Η συνάρτηση f είναι επί, γιατί το σύνολο τιμών της είναι ίδιο με το πεδίο τιμών, αφού $R_f = (3, 9]$ και $f\colon [3, +\infty) \longrightarrow (3, 9]$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Έστω $x_1, x_2, \in [3, +\infty)$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \frac{3x_1}{x_1 - 2} = \frac{3x_2}{x_2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow 3x_1x_2 - 6x_1 = 3x_2x_1 - 6x_2$$

$$\Leftrightarrow 6x_1 = 6x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Αφού η συνάρτηση f είναι $1-1$ και επί, συμπεραίνουμε ότι αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της έχει τύπο:

$$f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-3}, \qquad x\in(3,9]$$

(γ) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$, πρέπει το σύνολο $A'=\{x\in D_g$ και $g(x)\in D_f\}$ να μην είναι κενό. Δηλαδή, $A'=\left\{x\in[-5,5] \text{ και } \sqrt{25-x^2}\in[3,+\infty)\right\}\neq\emptyset$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ \sqrt{25-x^2}\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ 25-x^2\geq 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ x^2\leq 16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ \sqrt{x^2}\leq\sqrt{16}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ |x|\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ -4\leq x\leq 4\end{cases}\Rightarrow -4\leq x\leq 4$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ \sqrt{25-x^2}\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ 25-x^2\geq 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ x^2-16\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ (x-4)(x+4)\leq 0\end{cases}$$

x	$-\infty$ -4 4 $+\infty$
x^2-16	+ 0 − 0 +

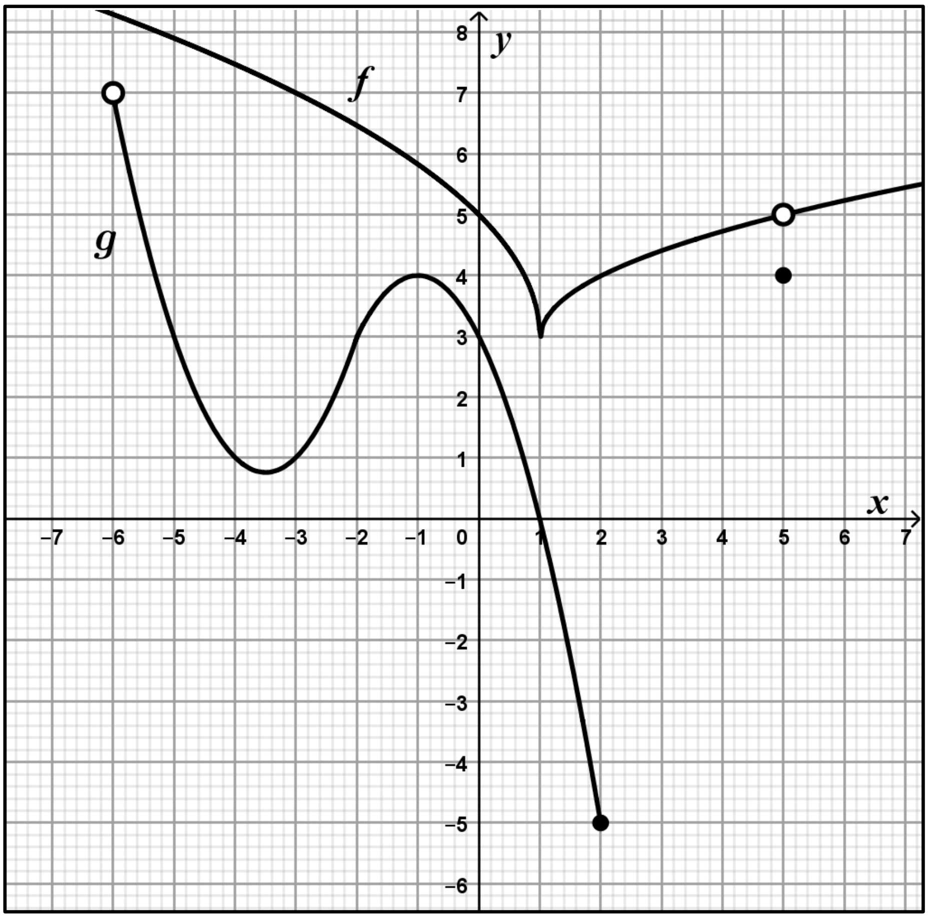
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ -4\leq x\leq 4\end{cases}\Rightarrow -4\leq x\leq 4$$

Επομένως: $A'=[-4,4]\neq\emptyset$

Άρα, ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$ με τύπο:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{25-x^2}\right)=\frac{3\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{25-x^2}-2}, x\in[-4,4]$$

B3. Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g\colon (-6,2] \to g((-6,2])$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο της με τετμημένη $x=-1$.



(α) i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

ii) Να υπολογίσετε τις τιμές $(f+g)(2)$ και $(f\cdot g)(1)$.

iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$. **(Μονάδες 1 / 2 / 1)**

(β) i) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη.

ii) Να βρείτε την τιμή $g'(-1)$. **(Μονάδες 4 / 2)**

(γ) i) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

ii) Ορίζεται η συνάρτηση $h\colon [-3,2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=f(x)+g(x)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-3,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

(Μονάδες 3 / 2)

Λύση

(α) i) $R_g = [-5, 7)$

ii) $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = (-6, 2] \Rightarrow D_f \cap D_g = (-6, 2]$

$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + (-5) = -1$

$(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = 3 \cdot 0 = 0$

iii) $D_{\frac{f}{g}} = (-6, 1) \cup (1, 2]$ αφού $D_f \cap D_g = (-6, 2]$ και $g(1) = 0$

(β) i) Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη για $x = 1$ και $x = 5$.

ii) $g'(-1) = 0$

(γ) i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 5} f(x) = 5$

ii) $h: [-3, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) + g(x)$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-3, 2]$ γιατί προκύπτει από άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε ότι:

$h(-3) = f(-3) + g(-3) = 7 + 1 = 8 > 0$

$h(2) = f(2) + g(2) = 4 + (-5) = -1 < 0$

Επομένως, $h(-3) \cdot h(2) = -8 < 0$.

Επειδή η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-3, 2]$ και ισχύει $h(-3) \cdot h(2) < 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-3, 2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ