

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-2026

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ/ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20 Μαΐου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΚ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΚΑ (10) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

- A1** (α) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ριζών:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$$

(7 μονάδες)

- (β) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = 8$

(3 μονάδες)

Λύση

(α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} = \sqrt{2 \cdot 8} - \sqrt{\frac{48}{12}} = \sqrt{16} - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2$

(β) $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2$

- A2** Δίνεται ο κύκλος (K, R) και η εγγεγραμμένη γωνία $BA\Gamma$ με μέτρο ίσο με 50° , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B και η AB είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας, το μέτρο:

- (α) της γωνίας x

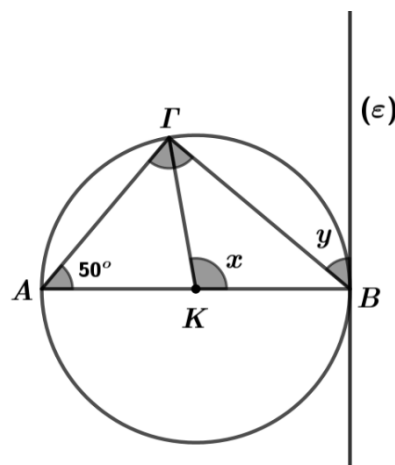
(4 μονάδες)

- (β) της γωνίας y

(4 μονάδες)

- (γ) της γωνίας $A\Gamma B$.

(2 μονάδες)



Λύση

(α) Η εγγεγραμμένη γωνία BAG βαίνει στο μικρό τόξο $BΓ$, όπως και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $BKG = x$. Επομένως, από τη σχέση εγγεγραμμένης γωνίας και αντίστοιχης επίκεντρης έχουμε:

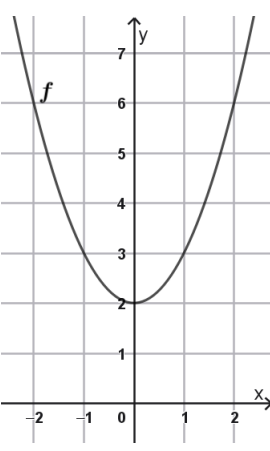
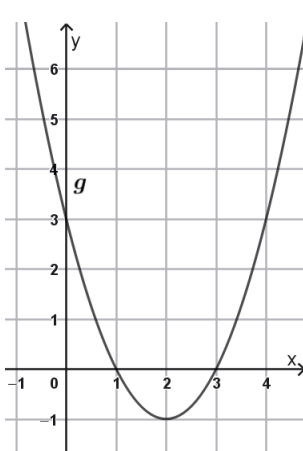
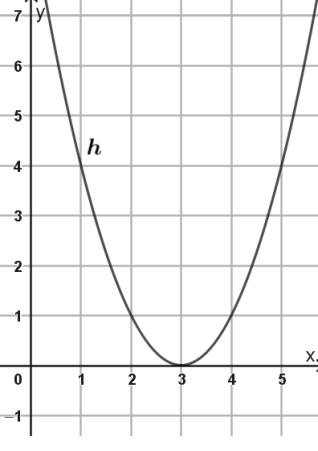
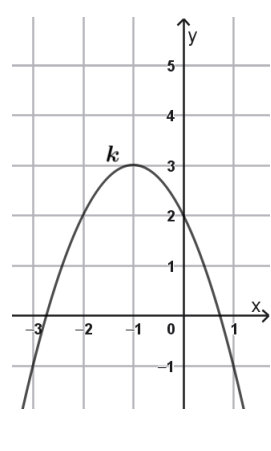
$$x = 2 \cdot B\hat{A}G \Rightarrow x = 2 \cdot 50 \Rightarrow x = 100^\circ$$

(β) Η γωνία y σχηματίζεται από τη χορδή $BΓ$ και την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο άκρο B της χορδής $BΓ$.

Από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης, έχουμε ότι η γωνία y είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία $BAG = 50^\circ$, η οποία βαίνει στο μικρότερο τόξο της χορδής $BΓ$. Άρα, $y = 50^\circ$.

(γ) Η εγγεγραμμένη γωνία AGB βαίνει στο ημικύκλιο AB . Από τη σχέση εγγεγραμμένης γωνίας και αντίστοιχου τόξου προκύπτει ότι $A\hat{G}B = 90^\circ$.

A3 Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h και k του ΠΙΝΑΚΑ Α με το κατάλληλο στοιχείο που δίνεται στον ΠΙΝΑΚΑ Β.
Να μεταφέρετε μόνο την αντιστοιχία στο τετράδιο απαντήσεών σας.

ΠΙΝΑΚΑΣ Α			
(α)	(β)	(γ)	(δ)
			

ΠΙΝΑΚΑΣ Β					
1	2	3	4	5	6
Κορυφή $K(-1, 2)$	Διακρίνουσα $\Delta = 0$	Κορυφή $K(2, -1)$	Άξονας συμμετρίας $x = -1$	Διακρίνουσα $\Delta < 0$	Άξονας συμμετρίας $x = 1$

Λύση

$$(\alpha) \rightarrow 5 \quad (\beta) \rightarrow 3 \quad (\gamma) \rightarrow 2 \quad (\delta) \rightarrow 4$$

A4 Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = -\frac{3}{5}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$.

(4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\epsilon\phi\theta$ και $\sigma\phi\theta$.

(3 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης:

$$A = \frac{16\epsilon\phi\theta + 3\sigma\phi\theta}{5\sigma\upsilon\nu\theta}$$

(3 μονάδες)

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta &= 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \\ &\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ &\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}\end{aligned}$$

Η τελική πλευρά της γωνίας θ ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο ($180^\circ < \theta < 270^\circ$).

Άρα, $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$ ($\sigma\upsilon\nu\theta < 0$)

(β) Έχουμε ότι:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \quad \sigma\phi\theta = \frac{1}{\epsilon\phi\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

(γ) $A = \frac{16\epsilon\phi\theta + 3\sigma\phi\theta}{5\sigma\upsilon\nu\theta}$

$$= \frac{16\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{4}{3}\right)}{5\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{12 + 4}{-4} = -4$$

- A5** (α) Στον πιο κάτω πίνακα φαίνεται ο αριθμός λογοτεχνικών βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές μιας τάξης σε ένα χρόνο.

Αριθμός Βιβλίων	Συχνότητα (f_i)	Αθροιστική Συχνότητα (Σf_i)
0	1	1
1	2	3
2	1	4
3	5	9
4	3	12
5	4	16

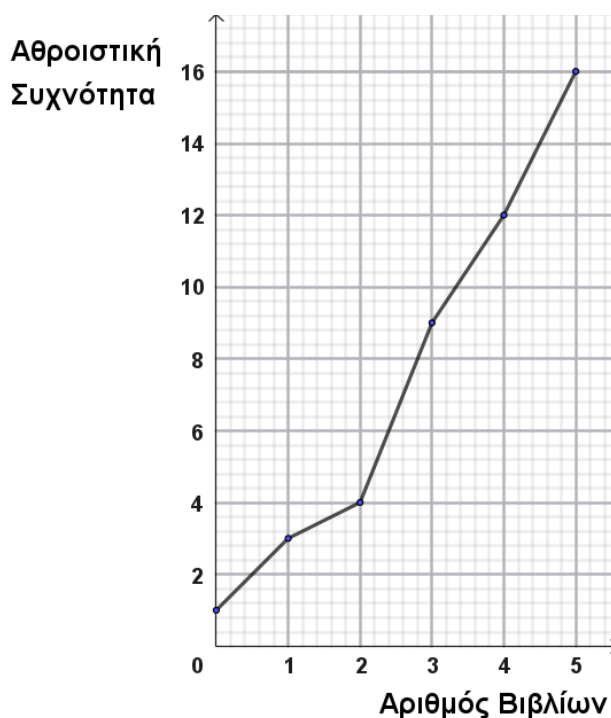
Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς.
Να μεταφέρετε τις απαντήσεις σας στο τετράδιο απαντήσεών σας.

Ισχυρισμοί	
A	Στην τάξη υπάρχουν συνολικά 16 μαθητές.
B	9 μαθητές της τάξης διάβασαν ακριβώς 3 βιβλία.
Γ	12 μαθητές της τάξης διάβασαν τουλάχιστον 4 βιβλία.

(6 μονάδες)

- (β) Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων για τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές της πιο πάνω τάξης μέσα σε ένα χρόνο. Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 .

(4 μονάδες)



Λύση

- (α) A: ΣΩΣΤΟ
B: ΛΑΘΟΣ
Γ: ΛΑΘΟΣ

- (β) Παρατηρούμε ότι έχουμε 16 παρατηρήσεις.
Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο,
υπολογίζουμε το 25% του 16.

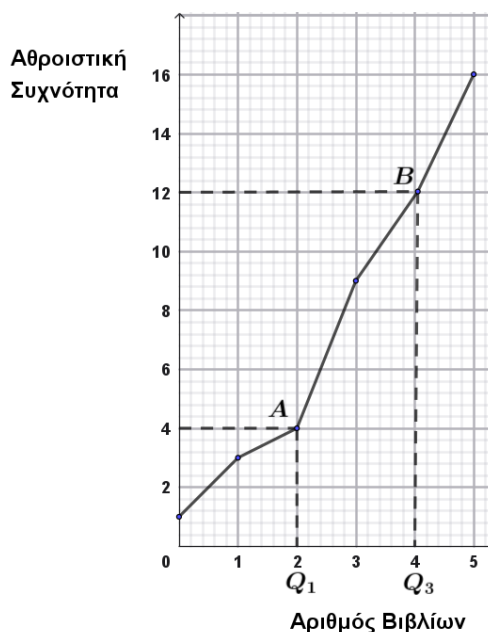
$$\frac{25}{100} \cdot 16 = 4$$

Βρίσκουμε την τιμή 4 στον άξονα της
αθροιστικής συχνότητας, φέρουμε την
οριζόντια ευθεία που τέμνει το πολύγωνο
σε ένα σημείο A. Από το σημείο A φέρουμε
ευθεία κάθετη στον άξονα του αριθμού των
βιβλίων. Άρα, $Q_1 = 2$.

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο,
υπολογίζουμε το 75% του 16.

$$\frac{75}{100} \cdot 16 = 12$$

Βρίσκουμε την τιμή 12 στον άξονα της
αθροιστικής συχνότητας, φέρουμε την
οριζόντια ευθεία που τέμνει το πολύγωνο
σε ένα σημείο B. Από το σημείο B φέρουμε
ευθεία κάθετη στον άξονα του αριθμού των
βιβλίων. Άρα, $Q_3 = 4$.



A6 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - 8 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (α) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει:

(i) λύση τη $x = -1$

(3 μονάδες)

- (ii) λύσεις αντίστροφες

(2 μονάδες)

- (β) Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - 8 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 7 \geq 0$.

(5 μονάδες)

Λύση

(α) (i) Το $x = -1$ επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - 8 = 0$.

$$\text{Επομένως, έχουμε } (-1)^2 + (\lambda - 1)(-1) + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -2$$

(ii) Έχουμε ότι $\alpha = 1$, $\beta = \lambda - 1$, $\gamma = \lambda^2 - 8$

Οι λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - 8 = 0$ είναι αντίστροφες,

$$\text{δηλαδή } x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow P = 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$$

(β) Υπολογίζουμε το άθροισμα S και το γινόμενο P των λύσεων x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - 8 = 0$.

$$\text{Έχουμε ότι } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{(\lambda-1)}{1} = -\lambda + 1$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda^2 - 8}{1} = \lambda^2 - 8$$

Παρατηρούμε ότι η ανίσωση $x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 7 \geq 0$ γράφεται στη μορφή:

$$S + P + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 + \lambda^2 - 8 + 7 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda \geq 0$$

Έχουμε ότι $\alpha = 1$ και $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$.

Δηλαδή, το διώνυμο $\lambda^2 - \lambda$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες, τις $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 1$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του διωνύμου $\lambda^2 - \lambda$.

λ	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$\lambda^2 - \lambda$	$+$	0	$-$	0	$+$

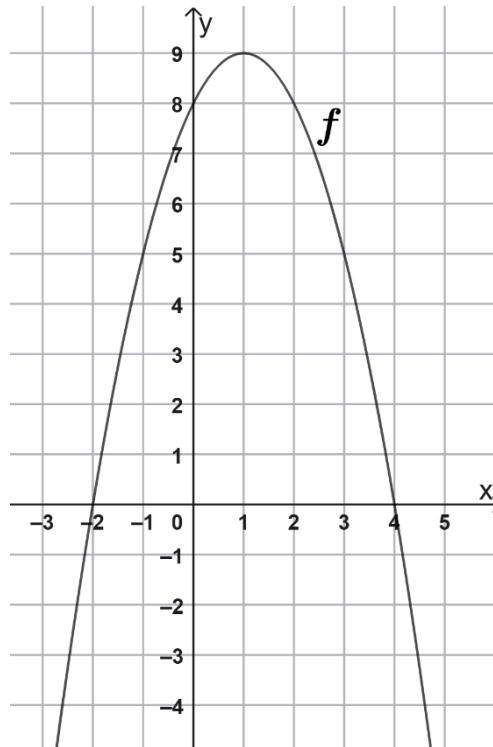
Επομένως, $\lambda^2 - \lambda \geq 0$, όταν $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Οι ασκήσεις Β1 και Β3 βαθμολογούνται με δεκαπέντε (15) μονάδες και η άσκηση Β2 με δέκα (10) μονάδες.

B1 Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.



Να βρείτε:

- | | |
|--|-------------|
| (α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f | (1 μονάδα) |
| (β) το πρόσημο του a | (2 μονάδες) |
| (γ) την τιμή του γ | (2 μονάδες) |
| (δ) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f | (2 μονάδες) |
| (ε) το πρόσημο της διακρίνουσας (Δ) της εξίσωσης $f(x) = 0$ | (2 μονάδες) |
| (στ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής | (2 μονάδες) |
| (ζ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ | (2 μονάδες) |
| (η) το πρόσημο των $f(2026)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$ | (2 μονάδες) |

Λύση

- (α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το \mathbb{R} .
- (β) Η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή, άρα $a < 0$.
- (γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο με συντεταγμένες $(0,8)$, άρα $\gamma = 8$.
- (δ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(-\infty, 9]$.
- (ε) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες, άρα $\Delta > 0$.
- (στ) Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(1,9)$.
- (ζ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των $x'x$ στα σημεία $(-2,0)$ και $(4,0)$. Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύσεις τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 4$.
- (η) $f(2026) < 0$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

B2 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$(α) \frac{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 2\varepsilon\varphi\theta$$

$$(β) \frac{\eta\mu(180^\circ - \omega)}{\eta\mu(90^\circ - \omega)} + \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}$$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} &= \frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} \\ &= \frac{1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta - 1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 2\varepsilon\varphi\theta \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu(180^\circ - \omega)}{\eta\mu(90^\circ - \omega)} + \sigma\varphi\omega &= \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \\ &= \frac{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} \end{aligned}$$

B3 Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, $AB = 6 \text{ cm}$, $B\Gamma = (x + 2) \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 9 \text{ cm}$, $AZ = y \text{ cm}$, $ZH = 2x \text{ cm}$ και $H\Theta = 6 \text{ cm}$,

Να αποδείξετε ότι:

(α) $x = 1$ και $y = 4$

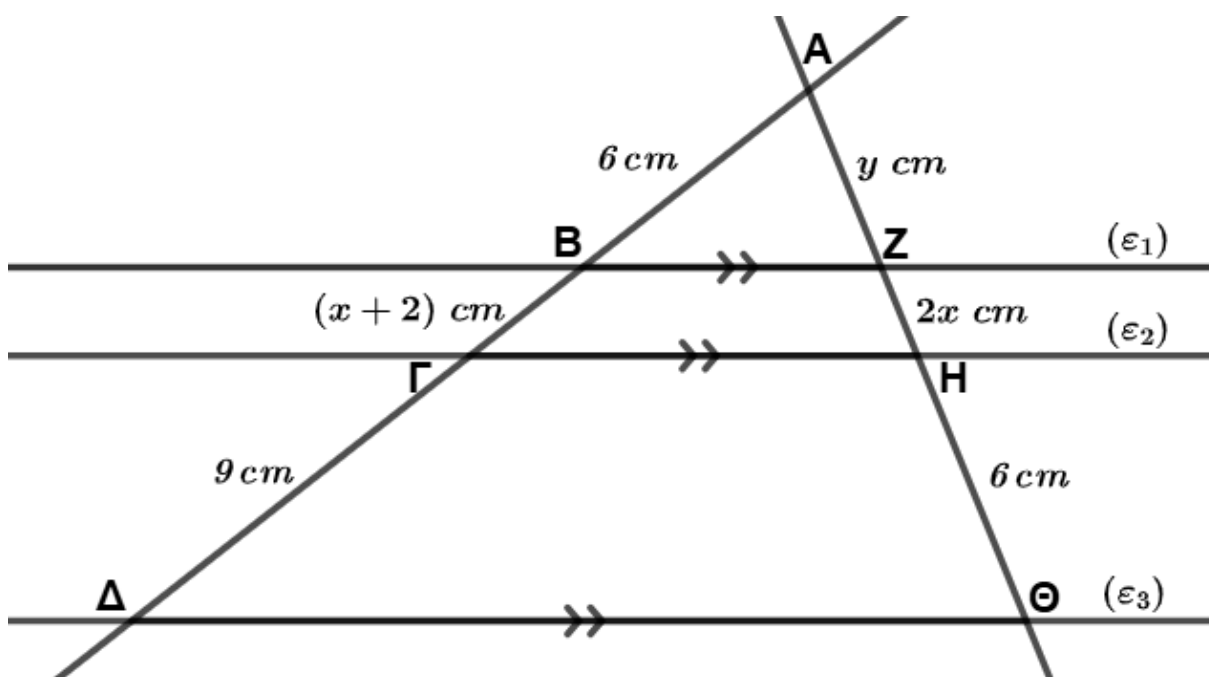
(6 μονάδες)

(β) τα τρίγωνα $\Delta\Delta\Theta$ και ABZ είναι όμοια

(6 μονάδες)

(γ) $(AB)(\Delta\Theta) = (\Delta\Delta)(BZ)$

(3 μονάδες)



Λύση

(α) Αφού $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$ σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{ZH}{H\Theta} \Rightarrow \frac{x + 2}{9} = \frac{2x}{6} \Rightarrow 6x + 12 = 18x \Rightarrow 12x = 12 \Rightarrow x = 1$$

Από το πόρισμα του Θεωρήματος Θαλή έχουμε επίσης ότι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AZ}{H\Theta} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{y}{6} \Rightarrow 9y = 36 \Rightarrow y = 4$$

(β) α' τρόπος

Έχουμε ότι:

$$A\Delta = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 18 \text{ cm}$$

$$A\Theta = AZ + ZH + H\Theta = 12 \text{ cm}$$

Για τα τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και ABZ ισχύει ότι:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A\Delta}{AB} = \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{A\Theta}{AZ} = \frac{12}{4} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Theta}{AZ}$$

και

\hat{A} κοινή γωνία στα δύο τρίγωνα

Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες, επομένως $\triangle A\Delta\Theta \approx \triangle ABZ$.

β' τρόπος

Για τα τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και ABZ ισχύει ότι:

\hat{A} κοινή γωνία στα δύο τρίγωνα και $\hat{\Delta} = \hat{B}$ εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες (ή $\hat{\Theta} = \hat{Z}$ εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες).

Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα $\triangle A\Delta\Theta \approx \triangle ABZ$.

(γ) Στο ερώτημα (β) αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και ABZ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων είναι ίσος με:

$$\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Theta}{BZ} = \frac{A\Theta}{AZ} \Rightarrow (AB)(\Delta\Theta) = (A\Delta)(BZ)$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ