

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-26  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2026  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: 2Γ  
ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΩΔΕΚΑ (12) ΣΕΛΙΔΕΣ

---

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.  
 Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.  
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

**A1.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α)  $(x + 5)^2$  (3 μονάδες)

(β)  $(x - 4)(x + 4)$  (3 μονάδες)

(γ)  $(2x - 3)^2$  (4 μονάδες)

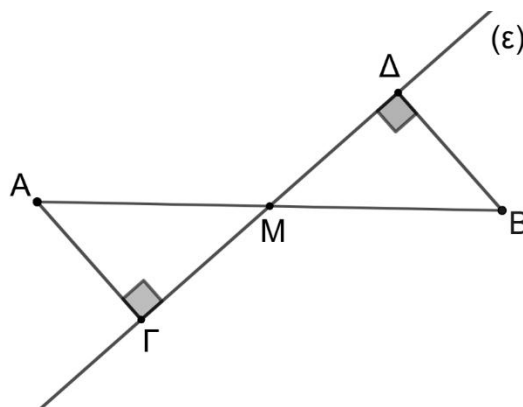
**Λύση:**

(α)  $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

(β)  $(x - 4)(x + 4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

(γ)  $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

**A2.** Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο M το μέσο του. Αν (ε) ευθεία η οποία διέρχεται από το M,  $BD \perp (\varepsilon)$  και  $AG \perp (\varepsilon)$ , να δείξετε ότι τα τρίγωνα BDM και AΓM είναι ίσα.



**Λύση:**

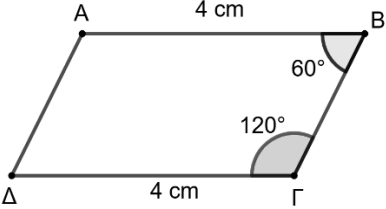
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $BM\Delta$ ,  $AM\Gamma$  τα οποία έχουν:

- |  |     |   |
|--|-----|---|
| (1) $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{BM\Delta}$ (κατακορυφήν γωνίες)   | (Γ) | } |
| (2) $\widehat{A\Gamma M} = \widehat{B\Delta M} = 90^\circ$ ( $AG \perp (\varepsilon)$ και $BD \perp (\varepsilon)$ ) | (Ο) |   |
| (3) $AM = MB$ (M μέσο του AB)  | (Π) |   |

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα  $BM\Delta$  και  $AM\Gamma$  είναι ίσα διότι έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία (Π-Γ-Ο).

**A3.** Να χαρακτηρίσετε με ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

**Λύση:**

(α) Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο ορθές γωνίες, τότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Η γενέτειρα $\lambda$ , το ύψος $υ$ και η ακτίνα $R$ του κώνου ικανοποιούν τη σχέση $\lambda^2 = υ^2 + R^2$ .	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Το πιο κάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. 	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ

**A4.** Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α)  $y^2 - 5y = 0$

(2 μονάδες)

(β)  $x^2 - 12x + 36 = 0$

(3 μονάδες)

(γ)  $2x^2 + x - 1 = 0$

(5 μονάδες)

**Λύση:**

(α)  $y^2 - 5y = 0$

$$y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y - 5) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ή } y = 5$$

$$(\beta) \quad x^2 - 12x + 36 = 0$$

**Α΄ ΤΡΟΠΟΣ:**

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 = 0 \Rightarrow x = 6, \text{ διπλή λύση}$$

**Β΄ ΤΡΟΠΟΣ:**

$$x^2 - 12x + 36 = 0, \quad a = 1, \quad \beta = -12, \quad \gamma = 36$$

Η εξίσωση έχει λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$(\gamma) \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

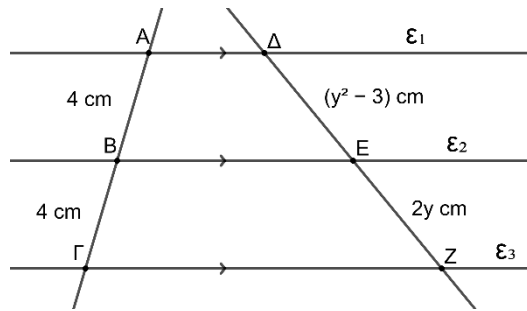
$$2x^2 + x - 1 = 0, \quad a = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1$$

Η εξίσωση έχει λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

**A5.** Να υπολογίσετε την τιμή του  $y$  στην πιο κάτω περίπτωση, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



**Λύση:**

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \\ AB = B\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E = EZ \Rightarrow y^2 - 3 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 3, \text{ Δεκτή} \quad \text{ή} \quad y = -1, \text{ Απορ.}$$

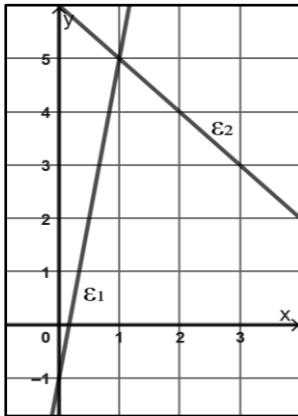
**A6.** (α) Να αντιστοιχίσετε κάθε ένα γραμμικό σύστημα της Στήλης Α, με την αντίστοιχη ορθή απάντηση της Στήλης Β, συμπληρώνοντας τις απαντήσεις σας στον Πίνακα 1 που ακολουθεί. (3 μονάδες)

Στήλη Α	Στήλη Β
(1) $\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$	(i) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
(2) $\begin{cases} y + x = 6 \\ y - 6x = -1 \end{cases}$	(ii) Το σύστημα δεν έχει λύση.
(3) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ 3y = 6x + 12 \end{cases}$	(iii) Το σύστημα έχει μοναδική λύση.

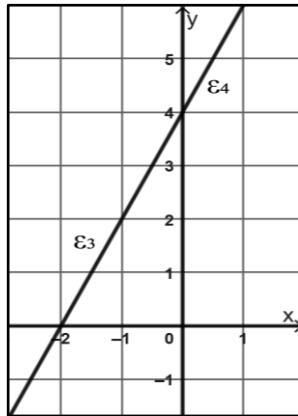
**Λύση:**

ΠΙΝΑΚΑΣ 1		
(1)	(2)	(3)
(ii)	(iii)	(i)

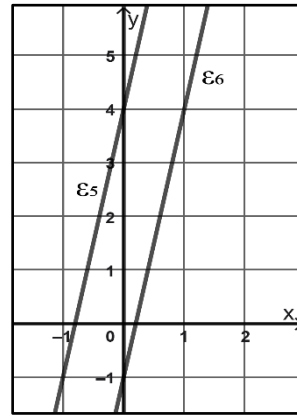
(β) Να αντιστοιχίσετε τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις Α, Β και Γ με τα πιο πάνω συστήματα εξισώσεων, συμπληρώνοντας τις απαντήσεις σας στον Πίνακα 2 που ακολουθεί. (3 μονάδες)



A



B



Γ

**Λύση:**

ΠΙΝΑΚΑΣ 2		
$\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = 5x + 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y + x = 6 \\ y - 6x = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ 3y = 6x + 12 \end{cases}$
Γ	A	B

(γ) Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

(4 μονάδες)

$$\begin{cases} y + x = 6 \\ y - 6x = -1 \end{cases}$$

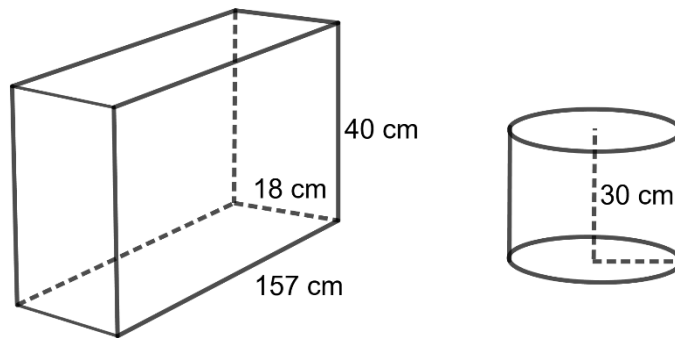
A τρόπος	B τρόπος
<p>Γραφική Λύση: Από το ερώτημα (β) το σημείο τομής των ευθειών είναι το (1,5).</p>	<p>Αλγεβρική Επίλυση:</p> $\begin{array}{r} y + x = 6 \\ y - 6x = -1 \end{array} \begin{array}{l} \left  \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} y + x = 6 \\ -y + 6x = 1 \end{array} \end{array}$ $7x = 7$ $\Rightarrow x = 1$ <p>Αντικαθιστούμε το <math>x = 1</math> στην <math>y + x = 6</math> και έχουμε <math>y + 1 = 6 \Rightarrow y = 5</math></p>

**ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.**

**Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.**

**Δυο ασκήσεις βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία και μία άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**B1.** Η Υπατία αγόρασε μια καινούργια γυάλα για τα φάρια της σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Θα τη γεμίσει πλήρως με νερό, χρησιμοποιώντας μια κανάτα σε σχήμα κυλίνδρου, χωρητικότητας  $3000\pi \text{ cm}^3$  και ύψους 30 cm. Το μήκος της γυάλας είναι 157 cm, το πλάτος της 18 cm και το ύψος της 40 cm.



- (α) Να δείξετε ότι η ακτίνα της βάσης της κυλινδρικής κανάτας είναι ίση με 10 cm. (3 μονάδες)
- (β) Να βρείτε πόσες κυλινδρικές κανάτες θα χρειαστούν για να γεμίσει πλήρως η γυάλα, αν δεν υπάρχει καμία απώλεια νερού (η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου). (4 μονάδες)
- (γ) Η Υπατία αποφάσισε να καλύψει την παράπλευρη επιφάνεια της γυάλας με αυτοκόλλητο. Να υπολογίσετε πόσα τετραγωνικά εκατοστά ( $\text{cm}^2$ ) αυτοκόλλητου θα χρειαστούν. (3 μονάδες)

**Λύση:**

(α) Να δείξετε ότι η ακτίνα της βάσης της κυλινδρικής κανάτας είναι ίση με 10 cm.

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow 3000\pi = \pi R^2 \cdot 30 \Rightarrow R^2 = \frac{3000\pi}{30\pi} \Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = 10 \text{ cm}, R > 0$$

(β) Να βρείτε πόσες κυλινδρικές κανάτες θα χρειαστούν για να γεμίσει πλήρως η γυάλα, αν δεν υπάρχει καμία απώλεια νερού (η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου).

$$V_{\text{γυάλας}} = \alpha\beta\gamma = 157 \cdot 18 \cdot 40 = 113040 \text{ cm}^3$$

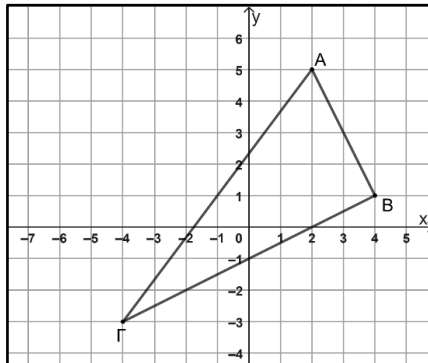
$$\frac{V_{\text{γυάλας}}}{V_{\text{κανάτας}}} = \frac{113040}{3000\pi} = \frac{113040}{3000 \cdot 3,14} = 12 \text{ Για να γεμίσει πλήρως η γυάλα θα χρειαστούν 12 κανάτες}$$

(γ) Η Υπατία αποφάσισε να καλύψει την παράπλευρη επιφάνεια της γιάλας με αυτοκόλλητο. Να υπολογίσετε πόσα τετραγωνικά εκατοστά ( $cm^2$ ) αυτοκόλλητου θα χρειαστούν.

$$E_{\pi} = 2(\alpha\gamma + \beta\gamma) = 2(157 \cdot 40 + 18 \cdot 40) = 14000 \text{ cm}^2$$

Θα χρειαστούν  $14000 \text{ cm}^2$  αυτοκόλλητου.

**B2.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(2,5)$ ,  $B(4,1)$  και  $\Gamma(-4,-3)$  όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ορθή. (4 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς  $A\Gamma$  είναι  $M(-1, 1)$ . (3 μονάδες)

(γ) Αν  $\Delta(-6, 1)$  να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο. (4 μονάδες)

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με την  $B\Gamma$ . (4 μονάδες)

**Λύση:**

(α)  $A(2,5)$ ,  $B(4,1)$ ,  $\Gamma(-4,-3)$

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_B - y_{\Gamma}}{x_B - x_{\Gamma}} = \frac{1 - (-3)}{4 - (-4)} = \frac{1 + 3}{4 + 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow AB \perp B\Gamma \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ.$$

$$(β) x_M = \frac{x_A + x_{\Gamma}}{2} = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{\Gamma}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

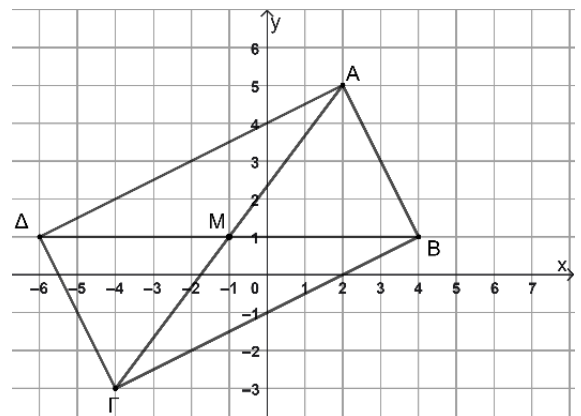
(γ) Α΄ ΤΡΟΠΟΣ:

Να αποδείξει πρώτα ότι το  $ABΓΔ$  είναι παραλληλόγραμμο με ένα από τους πιο κάτω τρόπους:

- (i) οι διαγώνιοί του διχοτομούνται,
- (ii) έχει 2 απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες,
- (iii) έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες ή τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Στη συνέχεια:

- (iv) να χρησιμοποιήσει το ερώτημα (α), δηλαδή ότι η γωνία Β είναι ορθή,
- (v) να αποδείξει ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου  $ABΓΔ$  είναι ίσες.



(γ) (i) Γνωρίζουμε από το ερώτημα (α) ότι  $AM = MΓ$

Θα αποδείξουμε ότι το  $M$  είναι μέσο και του  $BΔ$ :  $Δ(-6,1)$ ,  $B(4,1)$

$$x_M = \frac{x_B + x_Δ}{2} = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{y_B + y_Δ}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

Άρα, το  $M(-1,1)$  είναι το μέσο και του  $BΔ$ .

$$\left. \begin{array}{l} AM = MΓ \text{ (} M \text{ μέσο } AG \text{)} \\ ΔM = MB \text{ (} M \text{ μέσο } ΔB \text{)} \end{array} \right\}$$

Στο τετράπλευρο  $ABΓΔ$  οι διαγώνιοι διχοτομούνται  $\Rightarrow ABΓΔ$  παραλληλόγραμμο

(ii) Να αποδείξει ότι το τετράπλευρο έχει 2 απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες:

$$(AD) = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-6 - 2)^2 + (1 - 5)^2} =$$

$$\sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} \text{ μον.}$$

$$(BG) = \sqrt{(x_G - x_B)^2 + (y_G - y_B)^2} = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (-3 - 1)^2} =$$

$$\sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} \text{ μον.}$$

Άρα,  $AD = BG$

Επίσης, από (α) ερώτημα  $\lambda_{BG} = \frac{1}{2}$

$$\lambda_{AD} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{5 - 1}{2 - (-6)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_{BG} = \lambda_{AD} \Leftrightarrow BG \parallel AD$$

Το τετράπλευρο  $ABGD$  έχει 2 απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες  $\Rightarrow ABGD$  παραλληλόγραμμο.

(iii) Να αποδείξει ότι το τετράπλευρο  $ABGD$  έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες ή τις απέναντι πλευρές του ίσες (όπως πιο πάνω).

**Στη συνέχεια να συνδυάσει με ένα από τα ακόλουθα:**

(iv) Αποδείξαμε στο πρώτο ερώτημα ότι  $\hat{B} = 90^\circ$

Άρα, το  $ABGD$  είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία  $\Rightarrow ABGD$  ορθογώνιο

ή

$$(v) (DB) = |x_B - x_D| = |4 - (-6)| = 10 \text{ μον.}$$

$$(AG) = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-3 - 5)^2} =$$

$$\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ μον.}$$

Άρα,  $DB = AG$  οι διαγώνιοι είναι ίσες  $\Rightarrow ABGD$  είναι ορθογώνιο.

(γ) **Β΄ ΤΡΟΠΟΣ:**

Να αποδείξει ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έχει 3 ορθές γωνίες.

Γνωρίζουμε από το ερώτημα (α) ότι  $\widehat{B} = 90^\circ$  και  $\lambda_{AB} = -2$

$$\lambda_{A\Delta} = \frac{y_A - y_\Delta}{x_A - x_\Delta} = \frac{5 - 1}{2 - (-6)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Delta} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow AB \perp A\Delta \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^\circ.$$

Παρομοίως, να αποδείξουν  $\widehat{\Delta} = 90^\circ$  ή  $\widehat{\Gamma} = 90^\circ$ .

Άρα, το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έχει 3 ορθές γωνίες  $\Rightarrow AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.

(δ) Έστω  $\varepsilon: y = ax + \beta$  η ευθεία που είναι παράλληλη με την  $B\Gamma$ .

$$B\Gamma \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$$

Η ευθεία περνά από το  $A(2,5)$  άρα,

$$\varepsilon: y = ax + \beta \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \beta \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 5 - 1 = \beta \Leftrightarrow \beta = 4 \quad \text{Άρα, } \varepsilon: y = \frac{1}{2}x + 4$$

**B3.** Δίνονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} - \frac{8}{16-x^2}, \quad x \neq -4, x \neq 4 \text{ και}$$

$$B = \frac{x^2-7x+12}{2-2x} \cdot \frac{x-1}{x-3}, \quad x \neq 1, x \neq 3$$

(α) Να αποδείξετε ότι  $A = \frac{2}{x-4}$ . (5 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι  $B = -\frac{1}{A}$ . (5 μονάδες)

(γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $A - 1 = 0$  (5 μονάδες)

**Λύση:**

(α) Να αποδείξετε ότι  $A = \frac{2}{x-4}$ .

$$A = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} - \frac{8}{16-x^2} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} + \frac{8}{x^2-16}$$

$$= \frac{\underbrace{x-4}_1}{x+4} + \frac{\underbrace{x+4}_1}{x-4} + \frac{\underbrace{8}_8}{(x-4)(x+4)} \quad \text{ΕΚΠ} = (x-4)(x+4)$$

$$= \frac{x-4+x+4+8}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{2x+8}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{2\cancel{(x+4)}}{(x-4)\cancel{(x+4)}}$$

$$= \frac{2}{x-4}$$

(β) Να αποδείξετε ότι  $B = -\frac{1}{A}$ .

(5 μονάδες)

$$B = \frac{x^2 - 7x + 12}{2 - 2x} \cdot \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{(x - 4)(\cancel{x - 3})}{2(1 - x)} \cdot \frac{(x - 1)}{\cancel{x - 3}} = -\frac{(x - 4)(\cancel{x - 1})}{2(\cancel{x - 1})}$$
$$= -\frac{x - 4}{2} = -\frac{1}{A}$$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $A - 1 = 0$

(5 μονάδες)

$$A - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{x - 4} - 1 = 0 \quad \text{ΕΚΠ} = x - 4, \quad x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$$
$$\Rightarrow 2 - (x - 4) = 0$$
$$\Rightarrow 2 - x + 4 = 0$$
$$\Rightarrow -x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow x = 6, \text{ Δεκτή}$$

**ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ**