ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025-26

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: 2Β

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΟΙ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΤΕΚΑ (11) ΣΕΛΙΔΕΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u> : Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Α1. Να γράψετε σε μορφή μιας δύναμης τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $9^5 \cdot 9^3 =$
(β) $(-6)^7 \div (-6)^3 =$

Λύση:
(α) $9^5 \cdot 9^3 = 9^{5+3} = 9^8$
(β) $(-6)^7 \div (-6)^3 = (-6)^{7-3} = (-6)^4$ ή 6^4

Α2. (α) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις: (8 μονάδες)

i) $5a^2\beta - 2\alpha^2\beta =$
ii) $8x^3y^2 \cdot (-2x) =$

(β) Να εξηγήσετε γιατί τα μονώνυμα $-5xy^3$ και $4xy^3$ θεωρούνται όμοια.
(2 μονάδες)

……………………………………………………………………………………...………..…

Λύση:
(α) i) $5a^2\beta - 2\alpha^2\beta = 3\alpha^2\beta$ ii) $8x^3y^2 \cdot (-2x) = -16x^4y^2$
(β) Θεωρούνται όμοια, διότι έχουν το ίδιο κύριο μέρος xy^3

Α3. (α) Τα χρήματα που ξοδεύουν σε ευρώ 6 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας για να αγοράσουν παγωτό είναι:

$$7, 10, 18, 15, 12, 10$$

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των χρημάτων που ξοδεύουν οι πιο πάνω μαθητές σε μια εβδομάδα για να αγοράσουν παγωτό.

(β) Σε μια παγωταρία 4 μπάλες παγωτού κοστίζουν €6.
Ο Γιώργος, αυτή την εβδομάδα, ξόδεψε €15 για να αγοράσει παγωτά από τη συγκεκριμένη παγωταρία.
Πόσες μπάλες παγωτού αγόρασε αν η κάθε μπάλα παγωτού κοστίζει το ίδιο;

Λύση:
(α) $\bar{x} = \frac{7+10+18+15+12+10}{6} = \frac{72}{6} = 12$ Απ. Η μέση τιμή των χρημάτων που ξοδεύουν οι πιο πάνω μαθητές σε μια εβδομάδα για να αγοράσουν παγωτό είναι 12 ευρώ.

(β)

Αρ. Μπαλών παγωτού	Αξία παγωτού (€)
4	6
x	15

Ευθέως Ανάλογα Ποσά

$\frac{4}{x} = \frac{6}{15}$ (**<u>Β΄ Τρόπος</u>** $\frac{4}{6} = \frac{x}{15}$)

$\Leftrightarrow 6x = 4 \cdot 15$

$\Leftrightarrow 6x = 60$

$\Leftrightarrow x = 10$

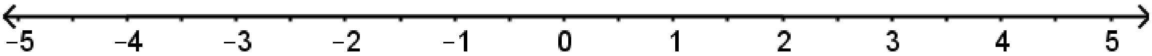
Απ. Αγόρασε 10 μπάλες παγωτού.

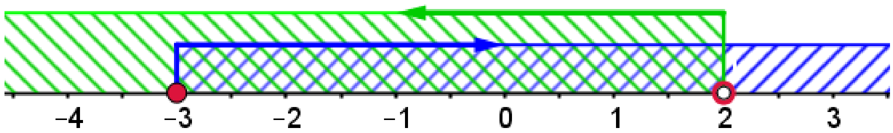
A4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

Λύση:	
(α) Οι διαγώνιοι κάθε ορθογωνίου διχοτομούν τις γωνίες του.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Δύο διαδοχικές γωνίες παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Οι διαγώνιοι κάθε ρόμβου ισούνται.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Οι διαγώνιοι κάθε ρόμβου τέμνονται κάθετα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) Τετράγωνο με μήκος διαγώνιου $\sqrt{2}\, cm$, έχει εμβαδόν $1\ cm^2$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Α5. (α) Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις τους στην ίδια ευθεία των πραγματικών αριθμών. (7 μονάδες)

$8x + 3 \geq 3x - 12$ και $\frac{2x-1}{5} - \frac{x-8}{15} > \frac{4x+1}{3} - 2$



<table>
<tr><td colspan="2">Λύση:</td></tr>
<tr><td>(α) $8x + 3 \geq 3x - 12$
$\Leftrightarrow 8x - 3x \geq -3 - 12$
$\Leftrightarrow 5x \geq -15$
$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} \geq \frac{-15}{5}$
$\Leftrightarrow x \geq -3$</td><td>$\frac{2x-1}{5} - \frac{x-8}{15} > \frac{4x+1}{3} - 2$
$\Leftrightarrow 3(2x-1) - (x-8) > 5(4x+1) - 30$
$\Leftrightarrow 6x - 3 - x + 8 > 20x + 5 - 30$
$\Leftrightarrow 5x - 20x > -5 + 5 - 30$
$\Leftrightarrow -15x > -30$
$\Leftrightarrow \frac{-15x}{-15} < \frac{-30}{-15}$
$\Leftrightarrow x < 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

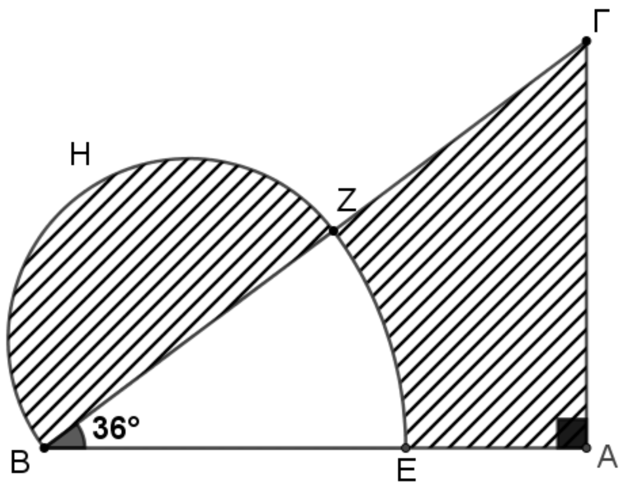
(β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των πιο πάνω ανισώσεων (αν υπάρχουν) και να τις γράψετε σε: (2 μονάδες)

i) μορφή διαστήματος
ii) μορφή ανίσωσης

(γ) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις. (1 μονάδα)

Λύση:
(β) i) μορφή διαστήματος: $x \epsilon [-3,2)$ ii) μορφή ανίσωσης: $-3 \leq x < 2$
(γ) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 1$

Α6. Στο πιο κάτω σχήμα το $ΓΑΒ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$, $Γ\hat{B}A = 36^\circ$ και $BΓ = 15\ m$.



(α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ του τριγώνου $ΓΑΒ$, αν γνωρίζουμε ότι $AΓ = \sqrt{87 - \sqrt{34 + \sqrt[3]{5 + \sqrt{9}}}}\ m$ (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής και δείχνοντας όλα τα βήματα που ακολουθήσατε). (2 μονάδες)

Λύση:
(α) $AΓ = \sqrt{87 - \sqrt{34 + \sqrt[3]{5 + \sqrt{9}}}} = \sqrt{87 - \sqrt{34 + \sqrt[3]{5 + 3}}} = \sqrt{87 - \sqrt{34 + \sqrt[3]{8}}}$ $= \sqrt{87 - \sqrt{34 + 2}} = \sqrt{87 - \sqrt{36}} = \sqrt{87 - 6} = \sqrt{81} = 9\ m$

(β) i) Αν $AΓ = 9\ m$ και $AE = 4\ m$ να δείξετε ότι $BE = 8\ m$. (3 μονάδες)

Λύση:
(β) i) Π.Θ. στο τρίγωνο $ΓAB$: $(BΓ)^2 = (AB)^2 + (AΓ)^2$ $\Rightarrow (BΓ)^2 = (AB)^2 + (AΓ)^2 \Rightarrow 15^2 = (AB)^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = (AB)^2 + 81$ $\Rightarrow (AB)^2 = 225 - 81 \Rightarrow (AB)^2 = 144 \Rightarrow (AB) = \sqrt{144}$, αφού $(AB) > 0$ $\Rightarrow (AB) = 12\ m$ $(BE) = (AB) - (AE) = 12 - 4 = 8\ m$

ii) Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα BE, γράφουμε τόξο EZ μέσα στο τρίγωνο. Στη συνέχεια, με διάμετρο BZ γράφουμε ημικύκλιο BHZ έξω από το τρίγωνο, όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα.
Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.
(Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π) (5 μονάδες)

Λύση:
(β) ii) $R_{\kappa\tau} = (BE) = 8\ m$ $R_{\eta\mu} = \frac{(BE)}{2} = \frac{8}{2} = 4\ m$ $E_{AB\Gamma} = \frac{\beta\cdot\upsilon}{2} = \frac{(A\Gamma)(AB)}{2} = \frac{9\cdot12}{2} = 54\ m^2$ $E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(BZE)} = \frac{\pi R_{\kappa\tau}^2 \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi (BE)^2 \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\cdot8^2\cdot36^\circ}{360^\circ} = \frac{32\pi}{5}\ m^2$ $E_{\eta\mu.(BHZ)} = \frac{\pi R_{\eta\mu}^2}{2} = \frac{\pi\cdot4^2}{2} = 8\pi\ m^2$ $E_{\sigma\kappa\iota\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\varsigma} = E_{AB\Gamma} + E_{\eta\mu.(BHZ)} - E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(BZE)}$ $= 54 + 8\pi - \frac{32\pi}{5} = \left(54 + \frac{8\pi}{5}\right)\ m^2$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄. ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.

Β1. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ και $h(x) = x + 3$.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή: $f(-3)$ (2 μονάδες)

(β) Να βρείτε το πολυώνυμο: $f(x) - x \cdot h(x)$ (2 μονάδες)

(γ) Να κάνετε τη διαίρεση $f(x) \div h(x)$ (3 μονάδες)

(δ) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $2[h(x)]^2 - f(x) = 16x + 17$ (2 μονάδες)

(ε) Αν $s(x) = 4\omega - 3x$ και $s(-1) = 23$, να βρείτε την τιμή του ω. (1 μονάδα)

Λύση:

(α) $f(-3) = 2(-3)^2 - 4(-3) + 1 = 2 \cdot 9 + 12 + 1 = 18 + 12 + 1 = 31$

(β) $f(x) - x \cdot h(x) = (2x^2 - 4x + 1) - x(x + 3\ )$

$$= 2x^2 - 4x + 1 - x^2 - 3x = x^2 - 7x + 1$$

(γ)

$$\begin{array}{rr|l}
2x^2 - 4x + 1 & & x + 3 \\ \cline{3-3}
-2x^2 - 6x \quad\quad + & & 2x - 10 \\ \cline{1-1}
-10x + 1 & & \\
10x + 30 + & & \\ \cline{1-1}
31 & &
\end{array}$$

(δ) $A'\mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = 2[h(x)]^2 - f(x) = 2(x + 3)^2 - (2x^2 - 4x + 1)$

$$= 2(x + 3)(x + 3) - (2x^2 - 4x + 1)$$

$$= 2(x^2 + 3x + 3x + 9) - (2x^2 - 4x + 1)$$

$$= 2x^2 + 6x + 6x + 18 - 2x^2 + 4x - 1$$

$$= 16x + 17$$

$$= B'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$$

(ε) $s(x) = 4\omega - 3x$

$s(-1) = 4\omega - 3(-1) = 4\omega + 3$

Ισχύει:
$s(-1) = 23$

$\Leftrightarrow 4\omega + 3 = 23$

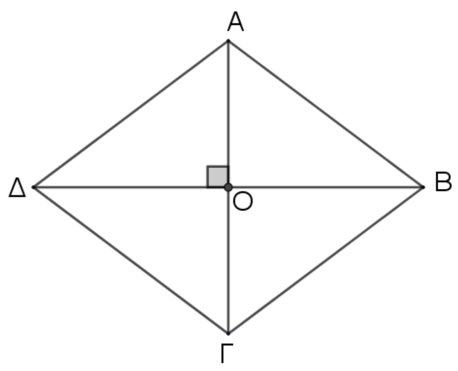
$\Leftrightarrow 4\omega = 23 - 3$

$\Leftrightarrow 4\omega = 20$

$\Leftrightarrow \frac{4\omega}{4} = \frac{20}{4}$

$\Leftrightarrow \omega = 5$

Β2. Οι διαγώνιοι του ρόμβου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Ο$ και ισχύει:



$$ΑΓ = \left[\sqrt[3]{27} + \sqrt{8} \div \sqrt{2} + (3^7)^2 \div \left(\frac{1}{3}\right)^{-14}\right] cm$$

και

$$ΒΔ = \left[(-2)^6 \div (-2)^4 + \sqrt{3^2 + 4^2} - 16 \cdot (-2+6)^{-2}\right] cm$$

(α) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων και των ριζών (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής) και δείχνοντας όλα τα βήματα που ακολουθήσατε, να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 6\ cm$ και $ΒΔ = 8\ cm$. (4 μονάδες)

Λύση:

(α) $A\Gamma = \left[\sqrt[3]{27} + \sqrt{8} \div \sqrt{2} + (3^7)^2 \div \left(\frac{1}{3}\right)^{-14}\right]$

$= \left[3 + \sqrt{8 \div 2} + 3^{14} \div (3)^{14}\right] = (3 + \sqrt{4} + 3^0) = 3 + 2 + 1 = 6\ cm$

$B\Delta = \left[(-2)^6 \div (-2)^4 + \sqrt{3^2 + 4^2} - 16 \cdot (-2+6)^{-2}\right]$

$= \left[(-2)^{6-4} + \sqrt{9+16} - 16 \cdot (4)^{-2}\right] = \left[(-2)^2 + \sqrt{25} - 4^2 \cdot (4)^{-2}\right]$

$= 4 + 5 - 4^0 = 4 + 5 - 1 = 8\ cm$

(β) i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με $24\ cm^2$. (2 μονάδες)

ii) Να βρείτε την περίμετρο του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$. (4 μονάδες)

Λύση:

(β) i) $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{(A\Gamma)(B\Delta)}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$

ii) $(OA) = \frac{(A\Gamma)}{2} = \frac{6}{2} = 3\ cm$

$(OB) = \frac{(B\Delta)}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$

Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΟ:

$(AB)^2 = (OB)^2 + (OA)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow (AB)^2 = 16 + 9$

$\Rightarrow (AB)^2 = 25 \Rightarrow (AB) = \sqrt{25}$,αφού $(AB) > 0$

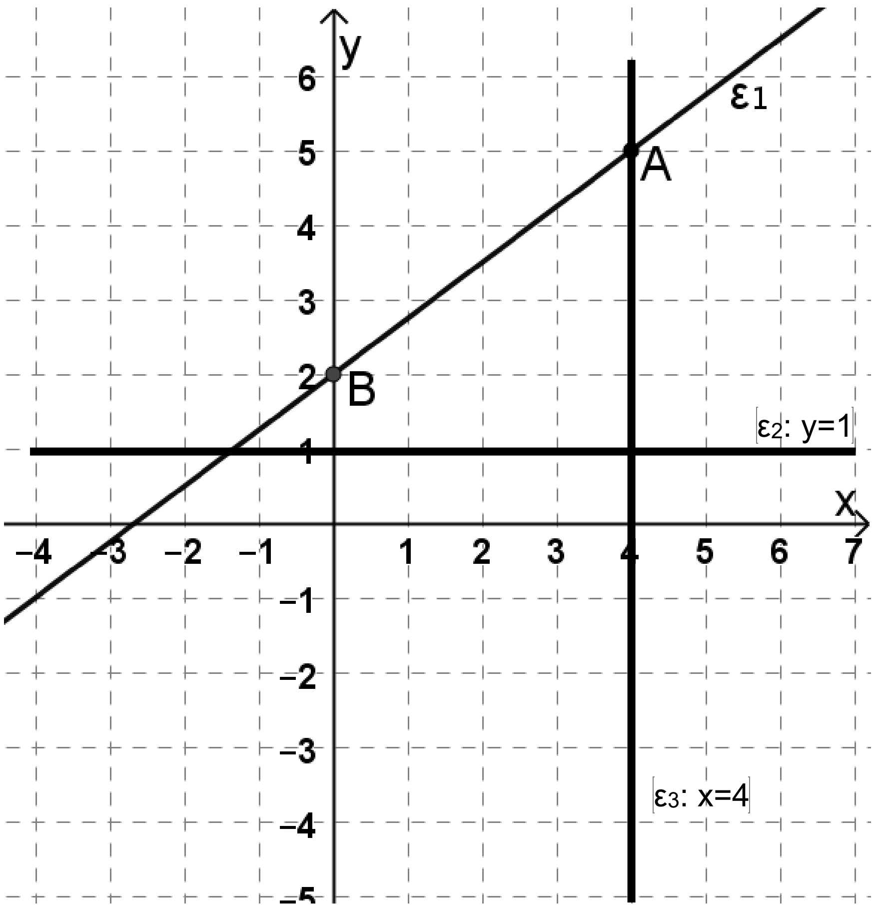
$\Rightarrow (AB) = 5\ cm$

$\Pi_{AB\Gamma\Delta} = 4 \cdot (AB) = 4 \cdot 5 = 20\ cm$

(γ) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος εξαπλάσιο από το πλάτος του και είναι ισεμβαδικό με τον πιο πάνω ρόμβο. Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (5 μονάδες)

Λύση:
(γ) Μήκος: $\alpha = 6x$ Πλάτος: $\beta = x$ $E_{ορθογωνίου} = E_{ρόμβου}$ $\Rightarrow 6x \cdot x = 24 \Leftrightarrow 6x^2 = 24 \Rightarrow \frac{6x^2}{6} = \frac{24}{6} \Rightarrow x^2 = 4$ $\Rightarrow x = \sqrt{4}$,αφού $x > 0 \Leftrightarrow x = 2\ cm$ Μήκος= $6 \cdot 2 = 12\ cm$, Πλάτος= $2\ cm$ $\Pi_{ορθογωνίου} = 2(\alpha + \beta) = 2(12 + 2) = 2 \cdot 14 = 28\ cm$

B3. Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία A και B.



(α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B. (2 μονάδες)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1.
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας) (3 μονάδες)

(γ) Στο πιο πάνω σύστημα αξόνων να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών $\varepsilon_2 \colon y = 1$ και $\varepsilon_3 \colon x = 4$. (2 μονάδες)

(δ) Να βρείτε τις κλίσεις των ευθειών ε_2 και ε_3. (2 μονάδες)

(ε) Αν το σημείο $\Gamma(7, -\mu + 4)$ ανήκει στην ευθεία ε_2, να βρείτε την τιμή του μ.
(2 μονάδες)

(στ) Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 2$.
Οι ευθείες $\varepsilon_4 \colon y = (3\omega + 4)x + (2\kappa - 2)$ και ε_1 διέρχονται από το ίδιο σημείο πάνω στον άξονα $y'y$.
Αν η ευθεία ε_4 έχει κλίση -5, να βρείτε τις τιμές των κ και ω. (4 μονάδες)

Λύση:

(α) $A(4,5) \quad B(0,2)$

(β) $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$

$(0, \beta) = (0,2)$, άρα $\beta = 2$

$\alpha = \lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-5}{0-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

Άρα: $\varepsilon_1: y = \frac{3}{4}x + 2$

- Η κλίση της ευθείας μπορεί να υπολογιστεί:
  - ✓ με τον τύπο $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ή
  - ✓ με αντικατάσταση του σημείου A, ή άλλου σημείου, αφού βρεθεί το β.
- Το β μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση άλλου σημείου, αφού υπολογιστεί η κλίση με τον τύπο.

(γ) Δίνεται στη γραφική παράσταση

(δ) $\lambda_2 = 0$

λ_3 : δεν ορίζεται

(ε) $\varepsilon_2: y = 1$

$\Gamma(7, -\mu + 4)$ $\quad -\mu + 4 = 1$ (οι συντεταγμένες του σημείου Γ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε_2)

$\Leftrightarrow -\mu = -4 + 1 \Leftrightarrow -\mu = -3 \Leftrightarrow \frac{-\mu}{-1} = \frac{-3}{-1} \Leftrightarrow \mu = 3$

(στ) $\lambda_4 = -5$

$\Leftrightarrow 3\omega + 4 = -5 \Leftrightarrow 3\omega = -5 - 4 \Leftrightarrow 3\omega = -9 \Leftrightarrow \frac{3\omega}{3} = \frac{-9}{3} \Leftrightarrow \omega = -3$

$\beta_4 = \beta_1$

$\Leftrightarrow 2\kappa - 2 = 2 \Leftrightarrow 2\kappa = 2 + 2 \Leftrightarrow 2\kappa = 4 \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \kappa = 2$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ