

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2026

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 26 Ιουνίου 2026

8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (12x^3 + 4x^2 - 8x + 3)dx$$

Προτεινόμενη λύση:

$$\begin{aligned}\int (12x^3 + 4x^2 - 8x + 3)dx &= \frac{12x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 3x + c \\ &= 3x^4 + \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 3x + c\end{aligned}$$

A2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 12x + 7$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία.

Προτεινόμενη λύση:

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$		↘	↗

- η f είναι γνησίως φθίνουσα $\forall x \in (-\infty, 6]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα $\forall x \in [6, +\infty)$

A3. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{7}{12}$$

(α) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω πιθανότητες:

(i) $P(A \cap B)$

(1 μονάδα)

(ii) $P(B - A)$

(1 μονάδα)

(iii) $P(B/A)$

(2 μονάδες)

(β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

(1 μονάδα)

Προτεινόμενη λύση:

(α) (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{8}}$$

(ii) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} \Rightarrow \boxed{P(B - A) = \frac{1}{4}}$

(iii) $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8} \Rightarrow \boxed{P(B/A) = \frac{3}{8}}$

(β) **Α' τρόπος:**

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$\Rightarrow$ τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα

Β' τρόπος:

$$P(B/A) = P(B) = \frac{3}{8} \Rightarrow \text{τα ενδεχόμενα } A \text{ και } B \text{ είναι ανεξάρτητα}$$

A4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1, x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

(4 μονάδες)

(β) Αν $\kappa < 0$, να βρείτε το πρόσημο του $f(\kappa)$.

(1 μονάδα)

Προτεινόμενη λύση:

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 7$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 36 - 84 = -48 < 0$$

$$\text{Αφού } \Delta < 0, \alpha > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα

(β) Α' τρόπος:

$$\kappa < 0 \text{ και } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} \Rightarrow f(\kappa) < f(0) = -1 \\ \Rightarrow f(\kappa) < -1 < 0$$

Β' τρόπος:

$$f(\kappa) = \kappa^3 - 3\kappa^2 + 7\kappa - 1$$
$$\text{Αφού } \kappa < 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \kappa^3 < 0 \\ -3\kappa^2 < 0 \\ 7\kappa < 0 \\ -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\kappa) < 0$$

A5. Δίνεται η λέξη **ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(2 μονάδες)

(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με σύμφωνο και περιέχουν τη λέξη **ΚΛΗΡΟΣ**.

(3 μονάδες)

Προτεινόμενη λύση:

(α) Έχουμε τα γράμματα Ο, Ο, Λ, Λ, Η, Η, Κ, Ρ, Σ, Ω

$$M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{\underbrace{2! \cdot 2! \cdot 2!}_{2 \text{ Ο } 2 \text{ Λ } 2 \text{ Η}}} = \frac{10!}{8} \Rightarrow \boxed{M_{10}^{\varepsilon} = 453600} \text{ αναγραμματισμοί}$$

(β) ΚΛΗΡΟΣ, Ο, Λ, Η, Ω

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

Αρχίζουν με το γράμμα Λ: $M_4 = 4! = 24$

Αρχίζουν με τη λέξη ΚΛΗΡΟΣ: $M_4 = 4! = 24$

Επομένως, υπάρχουν $24 + 24 = \boxed{48}$ αναγραμματισμοί, που περιέχουν τη λέξη ΚΛΗΡΟΣ και αρχίζουν με σύμφωνο (Προσθετική αρχή).

A6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 + 2\beta x - 5, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = -1$.

Προτεινόμενη λύση:

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$, από θεώρημα Fermat ισχύει ότι: $f'(2) = 0$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0$

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x + 2\beta$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6\alpha x - 6$$

$$f''(-1) = 0 \Rightarrow 6\alpha(-1) - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 6x + 2\beta$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2\beta = 0 \Rightarrow -12 - 12 + 2\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 12}$$

A7. Ένας κύλινδρος και ένας κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι κατά $324\pi \text{ cm}^3$ μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου. Το ύψος του κυλίνδρου είναι 8 cm και το ύψος του κώνου είναι 12 cm .

Να υπολογίσετε:

(α) την ακτίνα της βάσης του κώνου,

(2 μονάδες)

(β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.

(3 μονάδες)

Προτεινόμενη λύση:

(α) Έστω R η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και του κώνου.

Αφού ο όγκος του κυλίνδρου είναι κατά $324\pi \text{ cm}^3$ μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου,

$$V_{\text{κυλ}} - V_{\text{κων}} = 324\pi$$

$$\pi R^2 U_{\text{κυλ}} - \frac{1}{3} \pi R^2 u_{\text{κων}} = 324\pi$$

$$\pi R^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \pi R^2 12 = 324\pi$$

$$8\pi R^2 - 4\pi R^2 = 324\pi$$

$$4\pi R^2 = 324\pi$$

$$R^2 = 81$$

$$R = 9 \text{ cm}$$

Άρα, ακτίνα βάσης κυλίνδρου και κώνου είναι $R = 9 \text{ cm}$

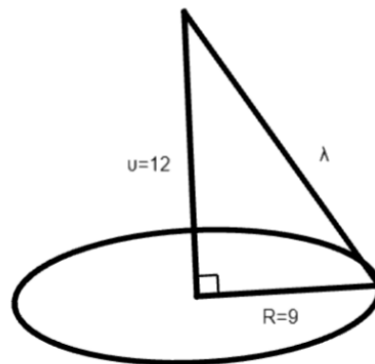
(β) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου δίνεται από τον τύπο:

$E_k = \pi R \lambda$ όπου λ είναι η γενέτειρα του κώνου.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

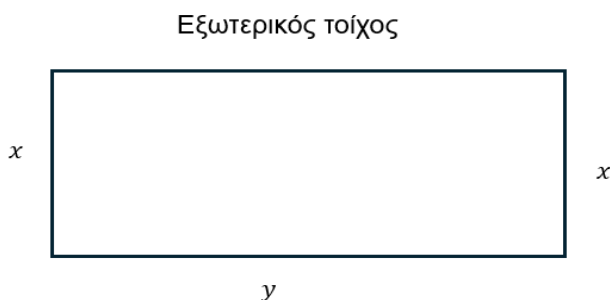
$$\begin{aligned}\lambda^2 &= R^2 + v^2 \\ \lambda^2 &= 9^2 + 12^2 \\ \lambda^2 &= 225 \\ \lambda &= 15 \text{ cm}\end{aligned}$$

Άρα, $E_K = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi \text{ cm}^2$



A8. Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει ένα χώρο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου στην αυλή του, έτσι ώστε η μία πλευρά του να είναι ο εξωτερικός τοίχος της αποθήκης του σπιτιού του. Θα χρησιμοποιήσει δίκτυ μήκους 120 m για να περιφράξει τις άλλες τρεις πλευρές του. Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν του περιφραγμένου χώρου.

Προτεινόμενη Λύση:



$$2x + y = 120 \Rightarrow y = 120 - 2x$$

$$E = xy \Rightarrow E(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2, \quad 0 < x < 60$$

$$E(x) = 120x - 2x^2 \Rightarrow E'(x) = 120 - 4x$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow 120 - 4x = 0 \Rightarrow x = 30$$

x	0	30	60
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	↗		↘

Η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα $\forall x \in (0, 30]$

Η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα $\forall x \in [30, 60)$

Για $x = 30 \text{ m}$ το εμβαδόν του περιφραγμένου χώρου μεγιστοποιείται.

$$E_{\max} = E(30) = 30 \cdot (120 - 2 \cdot 30) = 1800 \text{ m}^2$$

A9. Μία εταιρεία κυβερνοασφάλειας στη Λευκωσία σχεδιάζει ένα νέο σύστημα κλειδώματος. Ο κωδικός πρόσβασης για κάθε χρήστη αποτελείται από 6 διαφορετικούς χαρακτήρες, οι οποίοι επιλέγονται από το σύνολο των ψηφίων $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και το σύνολο των γραμμάτων $\{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$.

Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί κωδικοί μπορούν να σχηματιστούν, αν ο κωδικός:

(α) περιέχει 4 ψηφία και 2 γράμματα,

(β) αρχίζει με 3 ψηφία ακολουθούμενα από 3 γράμματα.

Προτεινόμενη Λύση:

(α) Α' τρόπος:

$$\text{Επιλογή των 4 ψηφίων: } \binom{7}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 35$$

$$\text{Επιλογή των 2 γραμμάτων: } \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$$

$$\text{Μεταθέσεις των 6 χαρακτήρων: } M_6 = 6! = 720$$

$$\text{Άρα, } 35 \cdot 10 \cdot 720 = 252\,000$$

Β' τρόπος:

Επιλογή των 4 θέσεων για τοποθέτηση των 4 ψηφίων με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στη συνέχεια με Δ_4^7 για την τοποθέτηση τους και τοποθέτηση με Δ_2^5 στις άλλες 2 θέσεις που απομένουν για τα γράμματα. Επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:

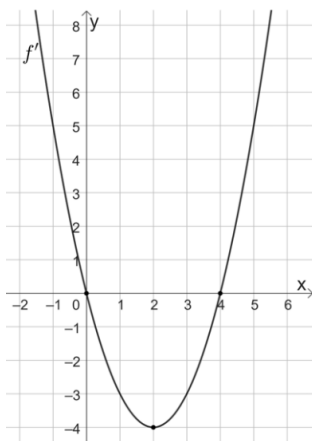
$$\binom{6}{4} \cdot \Delta_4^7 \cdot \Delta_2^5 = \frac{6!}{(6-4)!4!} \cdot \frac{7!}{(7-4)!} \cdot \frac{5!}{(5-2)!} = 15 \cdot 840 \cdot 20 = 252\,000$$

$$\text{(β) Επιλογή και διάταξη των 3 ψηφίων: } \Delta_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$$

$$\text{Επιλογή και διάταξη των 3 γραμμάτων: } \Delta_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$\text{Άρα, το πλήθος των κωδικών είναι: } 210 \cdot 60 = 12\,600$$

A10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μίας πολυωνυμικής συνάρτησης f .



- (α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. **(1 μονάδα)**
- (β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τα χαρακτηρίσετε. **(2 μονάδες)**
- (γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα. **(1 μονάδα)**
- (δ) Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\int (g(x) + 6) dx = f(x) + c$$

Να βρείτε την τιμή του $g(2)$. **(1 μονάδα)**

Προτεινόμενη Λύση

(α) Διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα όταν

$$f'(x) < 0$$

Από το σχήμα η γραφική παράσταση της f' βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για

$$0 < x < 4$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,4]$

(β) Τοπικά ακρότατα της f

Τα τοπικά ακρότατα εμφανίζονται στα σημεία όπου

$$f'(x) = 0$$

και η παράγωγος αλλάζει πρόσημο.

Από το σχήμα:

- Στο $x = 0$ η $f'(x) = 0$ και η f' αλλάζει από θετική σε αρνητική,
Άρα η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x = 0$
- Στο $x = 4$, η $f'(x) = 0$ και η f' αλλάζει από αρνητική σε θετική,
Άρα η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 4$

(γ) Κυρτότητα

Η f είναι κυρτή όταν η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η f είναι κοίλη όταν η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 2$, τότε

η f είναι κυρτή για $x \geq 2$

Επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα για $x \leq 2$, τότε

η f είναι κοίλη για $x \leq 2$

(δ) Τιμή του $g(2)$

Παραγωγίζουμε ως προς x και τα δύο μέρη

$$\frac{d}{dx} \int (g(x) + 6) dx = \frac{d}{dx} (f(x) + c)$$

$$g(x) + 6 = f'(x) \text{ τότε}$$

$$g(x) = f'(x) - 6$$

$$g(2) = f'(2) - 6 = -4 - 6 = -10 \text{ τότε } g(2) = -10$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(1,5 μονάδες)**
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- (i) τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, **(3 μονάδες)**

- (ii) την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, (1,5 μονάδες)
 (iii) τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. (1 μονάδα)
 (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (3 μονάδες)

Προτεινόμενη Λύση

(α) Πεδίο ορισμού και σημεία τομής με τους άξονες

Η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, άρα: $x \in \mathbb{R}$. Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Τομή με τον άξονα $y'y$

Για $x = 0$: $y = f(0) = 0$, $(0,0)$

Τομή με τον άξονα $x'x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^3 + 6x^2 - 9x &= 0 \\ -x(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ -x(x-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

οπότε: $x = 0$ ή $x = 3$

Άρα τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι: $(0,0), (3,0)$

(β) Μελέτη της συνάρτησης

i. Μονοτονία και τοπικά ακρότατα

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 12x - 9 \\ f'(x) &= -3(x^2 - 4x + 3) \\ f'(x) &= -3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

Κρίσιμα σημεία: $f'(x) = 0$ τότε $3(x-1)(x-3) = 0$

$$x = 1, x = 3$$

Πίνακας προσήμων της $f'(x)$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$

Τοπικά ακρότατα

Στο $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1) = -1 + 6 - 9 = -4$

Στο $x = 3$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$

ii. Κυρτότητα και σημεία καμπής

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = -6x + 12, f''(x) = -6(x - 2)$$

$$f''(x) = 0 \text{ τότε } 6(x - 2) = 0 \text{ τότε } x = 2.$$

Άρα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		Σ.Κ.	

- η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 2]$
- η f είναι κοίλη στο $[2, +\infty)$

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x = 2$, υπάρχει σημείο καμπής.

$$f(2) = -8 + 24 - 18 = -2$$

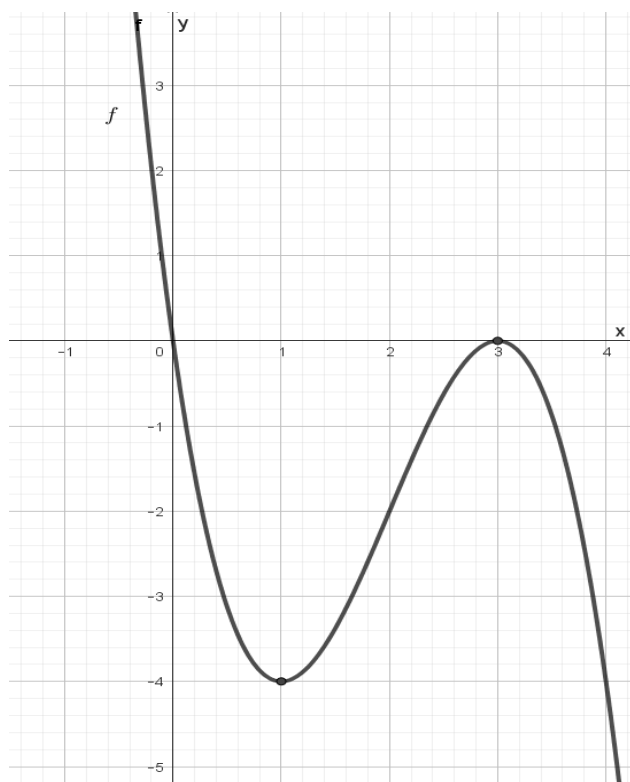
Άρα το σημείο καμπής είναι: $(2, -2)$

iii. Συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

(γ) Γραφική παράσταση



- B2.** Ένα γεωργικό ινστιτούτο στην ελεύθερη περιοχή Αμμοχώστου μελέτησε τη σχέση ανάμεσα στον μέσο αριθμό ωρών καθημερινής ηλιοφάνειας κατά τη διάρκεια του ανοιξιάτικου μήνα ανάπτυξης και στην τελική ετήσια σοδειά πατάτας (σε τόνους ανά δεκάριο). Τα δεδομένα από 5 τυχαία επιλεγμένα αγροτεμάχια στα Κοκκινοχώρια καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα:

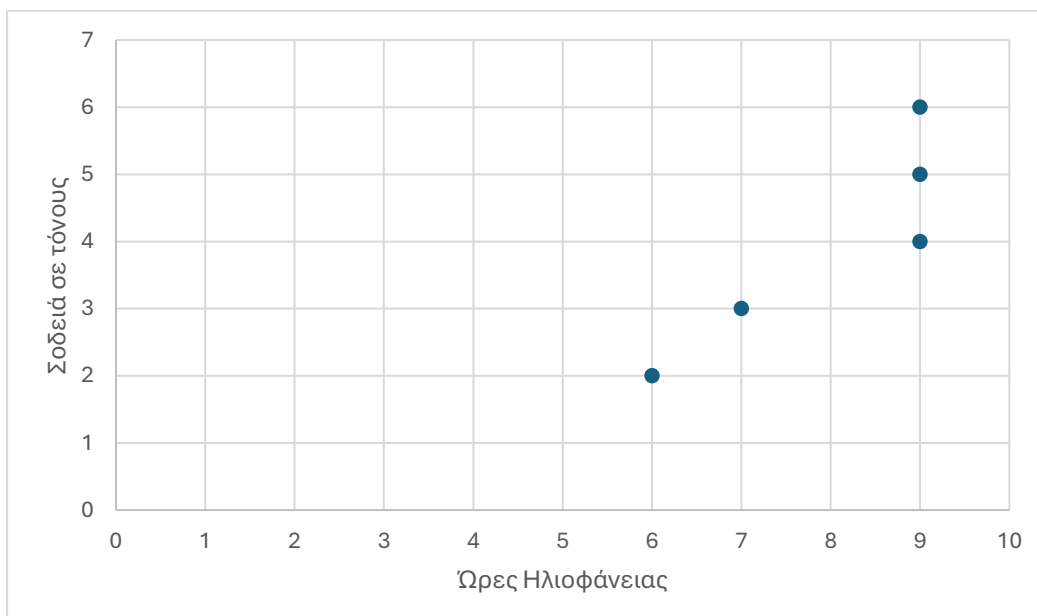
Ώρες Ηλιοφάνειας (x)	6	7	9	9	9
Σοδειά σε Τόνους (y)	2	3	4	5	6

- (α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ωρών ηλιοφάνειας ($\bar{x}$) και τη μέση τιμή των τόνων της σοδειάς ($\bar{y}$). **(2 μονάδες)**
- (β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(2 μονάδες)**
- (γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών. **(5 μονάδες)**
- (δ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. **(1 μονάδα)**

Προτεινόμενη Λύση

(α) $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{40}{5} = 8, \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{20}{5} = 4$

(β)



(γ)

x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
6	2	12	4	4
7	3	21	1	1
9	4	36	1	0
9	5	45	1	1
9	6	54	1	4
$\Sigma x = 40$	$\Sigma y = 20$	$\Sigma x_i y_i = 168$	$\Sigma (x_i - \bar{x})^2 = 8$	$\Sigma (y_i - \bar{y})^2 = 10$

Είναι: $s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{1,6} = 1,26$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1,41$$

Συντελεστής συσχέτισης:

$$r = \frac{\Sigma x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n s_x s_y} = \frac{168 - 5 \cdot 8 \cdot 4}{5 \cdot \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{2}} = 0,894$$

(δ) Παρατηρούμε ότι υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

B3. Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

(α) Να βρείτε πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα πιο πάνω ψηφία, χωρίς επανάληψη ψηφίου. **(2 μονάδες)**

(β) Παίρνουμε τυχαία έναν από τους πιο πάνω τετραψήφιους αριθμούς.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων ο αριθμός που επιλέξαμε:

(i) A: Να είναι περιττός. **(2 μονάδες)**

(ii) B: Να μην περιέχει το ψηφίο 5. **(2 μονάδες)**

(iii) Γ: Να είναι άρτιος και να περιέχει το ψηφίο 5. **(4 μονάδες)**

Προτεινόμενη Λύση

(α)

Χιλιάδες	Εκτοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
6	6	5	4

Από την Πολλαπλασιαστική Αρχή σχηματίζονται $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$ αριθμοί.

(β) (i) Από το (α) ερώτημα $v(\Omega) = 720$.

Για τον υπολογισμό του $v(A)$ έχουμε:

Χιλιάδες	Εκτοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	5	4	3

$$v(A) = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 .$$

$$\text{Άρα, } P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{300}{720} = \frac{5}{12}$$

(ii) Για τον υπολογισμό του $v(B)$ υπολογίζουμε τους τετραψήφιους που σχηματίζονται με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 6 χωρίς επανάληψη ψηφίου. Δηλαδή:

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	5	4	3

$$v(B) = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$$

$$\text{Άρα, } P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{300}{720} = \frac{5}{12}$$

$$\text{(iii) } P(\Gamma) = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

Α' τρόπος:

Για τον υπολογισμό του $v(A \cap B)$ έχουμε:

Χιλιάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
4	4	3	2

$$v(A \cap B) = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$$

$$\text{Άρα, } P(A \cap B) = \frac{v(A \cap B)}{v(\Omega)} = \frac{96}{720} = \frac{2}{15}$$

$$\text{Επομένως, } P(\Gamma) = 1 - \frac{5}{12} - \frac{5}{12} + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

Β' τρόπος:

$$v(\Gamma) = \underbrace{\binom{5}{2} \cdot 3!}_{\text{τελειώνει σε 0}} + \underbrace{3}_{\text{τελειώνει σε 2 ή 4 ή 6}} \cdot \left[\binom{5}{2} \cdot 3! - \underbrace{\binom{4}{1} \cdot 2!}_{\text{αρχίζουν από 0}} \right]$$

$$v(\Gamma) = 60 + 3 \cdot (60 - 8) = 60 + 3 \cdot 52 = 216$$

$$\Rightarrow P(\Gamma) = \frac{v(\Gamma)}{v(\Omega)} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$$

- B4.** Ο πληθυσμός ενός είδους ψαριών σε μια λίμνη δίνεται από τη συνάρτηση $P(t)$, όπου t είναι οι μήνες από την έναρξη μιας περιβαλλοντικής μελέτης διάρκειας 2 χρόνων. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P'(t) = 2000 - 100t, \quad 0 \leq t \leq 24$$

Σε ένα χρόνο, από την έναρξη της μελέτης, ο πληθυσμός των ψαριών στην λίμνη ήταν 31800.

- (α) Να αποδείξετε ότι: $P(t) = 2000t - 50t^2 + 15000$ (4 μονάδες)
 (β) Να υπολογίσετε τον μέγιστο πληθυσμό ψαριών, που είχε η λίμνη κατά τη διάρκεια της μελέτης. (4 μονάδες)
 (γ) Σε πόσους μήνες από την έναρξη της έρευνας ο πληθυσμός στην λίμνη έγινε 30000 ψάρια. (2 μονάδες)

Προτεινόμενη Λύση

(α) $P(t) = \int (2000 - 100t) dt = 2000t - 50t^2 + c$

$$P(12) = 16800 + c = 31800 \Rightarrow c = 15000$$

$$P(t) = 2000t - 50t^2 + 15000$$

(β) $P'(t) = 0 \Rightarrow t = 20$

t	0	20	24
$P'(t)$	+	0	-
$P(t)$	↗	O.M	↘

$$P(20) = 2000 \cdot 20 - 50 \cdot 20^2 + 15000 = 35000$$

Ο μέγιστος πληθυσμός ψαριών στην λίμνη είναι 35000

(γ) $P(t) = 30000 \Rightarrow 2000t - 50t^2 + 15000 = 30000 \Rightarrow 50t^2 - 2000t + 15000 = 0$

$$t^2 - 40t + 300 = 0 \Leftrightarrow (t - 10)(t - 30) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \text{ (Δεκτή)},$$

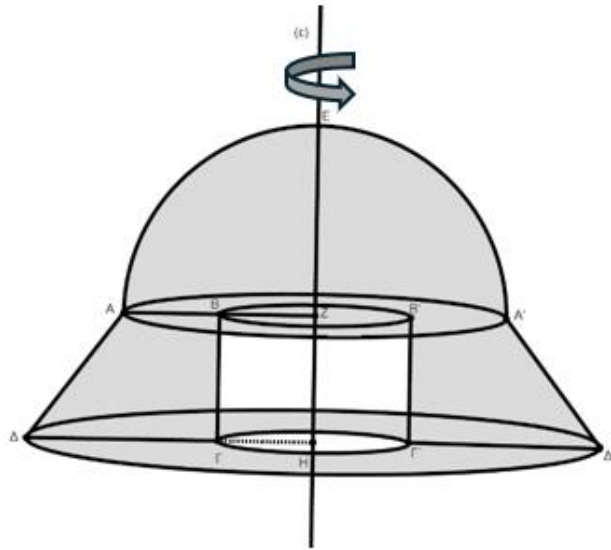
$$t = 30 \text{ (Απορίπτεται)}$$

- B5.** Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Τα σημεία A, B και Z είναι συνευθειακά. Με κέντρο το Z και ακτίνα ZA , γράφουμε τόξο AE . Δίνεται ότι $AB = BZ = B\Gamma$, $\Delta H = 12 \text{ cm}$, $AZ \perp (\varepsilon)$, $\Delta H \perp (\varepsilon)$ και $\widehat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$ (τα σημεία E, Z και H ανήκουν στην ευθεία (ε)). Το σκιασμένο σχήμα ($A\Delta\Gamma BZEA$) περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία (ε) .

Να υπολογίσετε συναρτήσει του π :

- (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και (6 μονάδες)
 (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται. (4 μονάδες)

ροτεινόμενη Λύση



(α) Φέρουμε το ύψος AK του ορθογώνιου τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$

$$\text{Είναι } AB = BZ = B\Gamma = x$$

$$\Delta K = K\Gamma = \Gamma H = x \text{ (Το τρίγωνο } AK\Delta \text{ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές)}$$

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

Κόλουρος κώνος

$$R = \Delta H = 12 \text{ cm} \quad \rho = AZ = 8 \text{ cm} \quad , \quad v = B\Gamma = 4 \text{ cm} \quad , \quad \lambda = A\Delta = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\eta_{\mu 45^\circ} = \frac{AK}{A\Delta} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{A\Delta} \Rightarrow A\Delta = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$E_{\text{κ.κόλουρου κώνου}} = E_{A\Delta} = \pi(R + \rho)\lambda = \pi \cdot (12 + 8) \cdot 4\sqrt{2} = 80\sqrt{2} \pi \text{ cm}^2$$

Ημισφαίριο

$$R = 8 \text{ cm}$$

$$E_{\text{Ημισφ.}} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8^2 = 128\pi \text{ cm}^2$$

Κύλινδρος

$$r = 4 \text{ cm} \quad , \quad v = B\Gamma = 4 \text{ cm}$$

$$E_{\text{κ.κυλίνδρου}} = 2\pi r v = 2\pi \cdot 4 \cdot 4 = 32\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{B.κυλ.} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

Δακτύλιος

$$E_{δακτ.} = \pi \cdot 12^2 - \pi \cdot 4^2 = 128\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\upsilon} = E_{AE} + E_{A\Delta} + E_{\Delta\Gamma} + E_{\Gamma B} + E_{BZ}$$

$$E_{\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\upsilon} = E_{H\mu\iota\sigma\varphi.} + E_{\kappa.\kappa\acute{o}\lambda\omicron\upsilon\rho\omicron\upsilon \kappa\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon} + E_{δακτ.} + E_{\kappa.κυλ\acute{\iota}\nu\delta\rho\omicron\upsilon} + E_{\beta.κυλ\acute{\iota}\nu\delta\rho\omicron\upsilon}$$

$$\begin{aligned} E_{\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\upsilon} &= 128\pi + 80\sqrt{2}\pi + 144\pi - 16\pi + 32\pi + 16\pi = (304\pi + 80\sqrt{2}\pi) \\ &= 16\pi(19 + 5\sqrt{2}) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$(\beta) V_{\kappa\acute{o}\lambda\omicron\upsilon\rho\omicron\upsilon \kappa\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon} = \frac{\pi(R^2 + R\rho + \rho^2)v}{3} = \frac{\pi(12^2 + 12 \cdot 8 + 8^2) \cdot 4}{3} = \frac{1216\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V_{H\mu\iota\sigma\varphi.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot 8^3}{3} = \frac{1024\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V_{Kυλ.} = \pi r^2 v = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 64\pi \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} V_{\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\upsilon} &= V_{H\mu\iota\sigma\varphi.} + V_{\kappa\acute{o}\lambda\omicron\upsilon\rho\omicron\upsilon \kappa\acute{\omega}\nu\omicron\upsilon} - V_{κυλ\acute{\iota}\nu\delta\rho\omicron\upsilon} = \\ &= \frac{1024\pi}{3} + \frac{1216\pi}{3} - 64\pi = \frac{2048\pi}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ