**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ**

**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2026**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)**

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 15 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**

**8:00 – 11:00**

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.**

**Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από ΔΥΟ (2) σελίδες.**

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

**Α1** Να βρείτε το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\tau o\xi\eta\mu x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

**Α2** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$, το $f(2)=-1$. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha$ και $\beta$.

**(Μονάδες 3)**

β) Αν $\alpha=-3$ και $\beta=3$, να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της $f$.

**(Μονάδες 2)**

**Α3** Εννέα σύνεδροι, εκ των οποίων ο ένας είναι ο πρόεδρος, οι δύο είναι σύμβουλοι και οι υπόλοιποι είναι μέλη, θα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι για να συνεδριάσουν. Ο πρόεδρος και οι δύο σύμβουλοί του θα κάθονται σε διαδοχικές θέσεις. Αν ο πρόεδρος πρέπει να κάθεται πάντοτε στη μεσαία θέση, ανάμεσα στους δύο συμβούλους του, να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση όλων των συνέδρων.

**A4** α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}=\frac{1}{\kappa+4}-\frac{1}{\kappa+5}$$

**(Μονάδες 1)**

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα της πιο κάτω σειράς:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}$$

**(Μονάδες 2)**

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+9x+23}{x^2+9x+20}\,dx$$

**(Μονάδες 2)**

**A5** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - xe^x = \ln x + \lambda$, $x \in (0,+\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

**A6** Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C): x^2+y^2=4$ και η παραβολή με εξίσωση $y^2=8x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας $E$ και την εξίσωση της διευθετούσας $\delta$ της παραβολής.

**(Μονάδες 1)**

β) Έστω $N(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$, $\theta \in (0,2\pi)$, τυχαίο σημείο του κύκλου $(C)$ και $\Sigma(x,y)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $EN$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $\Sigma$ είναι κύκλος με εξίσωση $(C_1): (x-1)^2+y^2=1$.

**(Μονάδες 2,5)**

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων $(C)$ και $(C_1)$.

**(Μονάδες 1,5)**

**A7** α) Έστω ότι $X$, $Y$ είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(X' \cap Y') = P(X') \cdot P(Y')$$

β) Αν $A$ και $B$ είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με

$$P(A)=3P(A'),\quad P(B)=\frac{1}{2} \text{ και } P(A\cup B)=\frac{7}{8},$$

να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ είναι ανεξάρτητα. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' \cap B')$.

**Α8** α) Να αποδείξετε ότι:

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x > 1 - e^{x}, \qquad \forall\, x > 0$$

**(Μονάδες 3)**

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tau o\xi\varepsilon\varphi x + e^{x} - 1}{x}$$

**(Μονάδες 2)**

**Α9** α) Έστω ότι η συνάρτηση $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int e^{-x}\big(f''(x) - f(x)\big)\,dx = e^{-x}\big(f'(x) + f(x)\big) + c$$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + x\ln x\right)dx$$

**Α10** α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{2}\sqrt{8 - x^{2}}\;dx = \pi + 2, \qquad x = 2\sqrt{2}\eta\mu\theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{8 - x^{2}}$, την καμπύλη $y = x^{3} + 4$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $x = 2$.

**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄**

**ΑΚΟΥΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**Β1** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$ και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τους άξονες των συντεταγμένων.

β) Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την $f$ ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

στ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

**(Μονάδες 1-2-2-2-2-1)**

**Β2** Έστω συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ και η ευθεία $(\varepsilon)$: $3x - y = 2$ εφαπτόμενη της γραφικής παράστασής της στο σημείο $(3, f(3))$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x > -1$$

**Β3** Ένα κουτί περιέχει $10$ όμοιες μπάλες από τις οποίες οι $7$ είναι κόκκινες και οι $3$ είναι πράσινες. Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες τυχαία από το κουτί. Αν η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τότε χωρίς να την επανατοποθετήσουμε στο κουτί παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα. Ενώ, αν η πρώτη μπάλα είναι πράσινη, τότε την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήραμε να είναι πράσινη.

**(Μονάδες 6)**

β) Αν η δεύτερη μπάλα που πήραμε είναι πράσινη, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήραμε να είναι κόκκινη;

**(Μονάδες 4)**

**Β4** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2,\ 2t),\ t \neq 0$. Στο σημείο $A$ φέρουμε εφαπτόμενη $(\varepsilon)$ η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $\Gamma$ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $B$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης $(\varepsilon)$ είναι:

$$(\varepsilon):\ ty = x + t^2$$

**(Μονάδες 2)**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $\Delta$ για το οποίο το $BO\Gamma\Delta$ (όπου $O$ η αρχή των αξόνων) είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, είναι η παραβολή $y^2 = -x$.

**(Μονάδες 3)**

γ) Θεωρούμε ότι το σημείο $A(t^2,\ 2t)$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο $(t > 0)$. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = -x$, τον άξονα των τεταγμένων και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο $V_1$. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4x$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $(\varepsilon)$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο $V_2$. Να αποδείξετε ότι:

$$V_1 = 3\,V_2$$

**(Μονάδες 5)**

**Β5** Η ευθεία που διέρχεται του σημείου $K(7,3)$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα $Ox$ στο σημείο $M$ και την ευθεία $y = x$ στο πρώτο τεταρτημόριο στο σημείο $N$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $M$ και $N$ έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $OMN$ (όπου $O$ η αρχή των αξόνων) να είναι ελάχιστο.

**ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ

### 1. Στατιστική

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\nu}} \quad \text{ή} \quad s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i x_i^2}{\nu}-\bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu=\sum_{i=1}^{\kappa}f_i$$

$$r=\frac{\Sigma_{xy}-\nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_\nu y_\nu$$

### 2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A\pm B)=\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B\pm\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A\pm B)=\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\mp\eta\mu A\eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad \sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu2\alpha=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \sigma\upsilon\nu2\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t=\varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \qquad \eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu\frac{B-A}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

**Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων**:

| | **Σε μοίρες** | **Σε ακτίνια** |
|---|---|---|
| $\eta\mu x=\eta\mu\alpha$ | $x=360^o\kappa+\alpha$ ή <br> $x=360^o\kappa+180^o-\alpha,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ | $x=2\pi\kappa+\alpha$ ή <br> $x=2\pi\kappa+\pi-\alpha,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ |
| $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\alpha$ | $x=360^o\kappa\pm\alpha,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ | $x=2\pi\kappa\pm\alpha,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ |
| $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\alpha$ | $x=180^o\ \kappa+\alpha,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ | $x=\pi\kappa+\alpha,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ |

## 3. Γεωμετρία

| | | |
|---|---|---|
| Ορθό πρίσμα | $E\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon$ | $V = E_\beta \cdot \upsilon$ |
| Κανονική Πυραμίδα | $E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta \cdot h$ | $V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3}$ |
| Κύλινδρος | $E_\kappa = 2\pi R\upsilon$ | $V = \pi R^2\upsilon$ |
| Κώνος | $E_\kappa = \pi R\lambda$ | $V = \frac{\pi R^2\upsilon}{3}$ |
| Κόλουρος Κώνος | $E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda$ | $V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$ |
| Σφαίρα | $E = 4\pi R^2$ | $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ |

## 4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1,y_1)$ από την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$: $d=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Έλλειψη: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$

Εστίες $(\pm\gamma,0)$, Διευθετούσες $x=\pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$, Εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$

## 5. Παράγωγοι

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ $(\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

## 6. Ολοκληρώματα

$\int \tau\varepsilon\mu x\, dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c$ $\int \sigma\tau\varepsilon\mu x\, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha} + c$ $\int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\frac{x}{\alpha} + c$

## 7. Απλός Τόκος

$$T=\frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$