

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2026

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 15 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026, 8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

A1 Να βρείτε το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\tauοξημχ}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ΛΥΣΗ:

Α΄ ΤΡΟΠΟΣ:

$$\int \frac{\tauοξημχ}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \tauοξημχ d(\tauοξημχ) = \frac{(\tauοξημχ)^2}{2} + c$$

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ:

Θέτουμε

$$u = \tauοξημχ \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Έχουμε, ότι:

$$\int \frac{\tauοξημχ}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \tauοξημχ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\tauοξημχ)^2}{2} + c$$

A2 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, το $f(2) = -1$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 3)

β) Αν $\alpha = -3$ και $\beta = 3$, να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 2)

ΛΥΣΗ:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x$$

Επιπλέον, η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x_0 = 2$, το $f(2) = -1$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat, ισχύει ότι:

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3(2)^2 + 4\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -3$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta \\ \alpha = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + \beta$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + \beta \\ f(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + \beta$$

$$\Rightarrow \beta = 3$$

β) Για $\alpha = -3$ και $\beta = 3$, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		ΣΚ	

Παρατηρούμε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Έχουμε ότι $f(1) = 1$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $(1, 1)$.

A3 Εννέα σύνεδροι, εκ των οποίων ο ένας είναι ο πρόεδρος, οι δύο είναι σύμβουλοι και οι υπόλοιποι είναι μέλη, θα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι για να συνεδριάσουν. Ο πρόεδρος και οι δύο σύμβουλοί του θα κάθονται σε διαδοχικές θέσεις. Αν ο πρόεδρος πρέπει να κάθεται πάντοτε στη μεσαία θέση, ανάμεσα στους δύο συμβούλους του, να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση όλων των συνέδρων.

ΛΥΣΗ:

Στην πρώτη φάση θεωρούμε τον πρόεδρο και τους δύο συμβούλους του ως ένα αντικείμενο. Επομένως, υπολογίζουμε το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων 7 αντικειμένων με $K_7 = 6!$. Στη δεύτερη φάση, για καθεμιά από τις τοποθετήσεις της πρώτης φάσης, οι δύο σύμβουλοι μπορούν να καθίσουν με M_2 τρόπους, διότι οι δύο σύμβουλοι ανταλλάσσουν θέσεις μεταξύ τους, ενώ ο πρόεδρος θα είναι πάντα στη μεσαία θέση. Συνεπώς, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, θα έχουμε συνολικά

$$M_2 \cdot K_7 = 2 \cdot 6! = 1440$$

διαφορετικούς τρόπους.

Εναλλακτικά:

$$M_2 \cdot M_6 = 2 \cdot 6! = 1440$$

A4 α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20} = \frac{1}{\kappa + 4} - \frac{1}{\kappa + 5}$$

(Μονάδες 1)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα της πιο κάτω σειράς:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20}$$

(Μονάδες 2)

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2 + 9x + 23}{x^2 + 9x + 20} dx$$

(Μονάδες 2)

ΛΥΣΗ:

α) Αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20} = \frac{1}{(\kappa + 4)(\kappa + 5)} = \frac{A}{\kappa + 4} + \frac{B}{\kappa + 5}$$

$$\Rightarrow 1 \equiv A(\kappa + 5) + B(\kappa + 4)$$

Για $\kappa = -4 \Rightarrow A = 1$

Για $\kappa = -5 \Rightarrow B = -1$

Επομένως:

$$\frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20} = \frac{1}{\kappa + 4} - \frac{1}{\kappa + 5}$$

(αποδείχθηκε)

β) Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20}$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το μερικό άθροισμα s_v της σειράς.

Έχουμε :

$$s_v = \sum_{\kappa=1}^v \frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20} = \sum_{\kappa=1}^v \left(\frac{1}{\kappa + 4} - \frac{1}{\kappa + 5} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{v+3} - \frac{1}{v+4} \right) + \left(\frac{1}{v+4} - \frac{1}{v+5} \right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{v+5}$$

Επομένως:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20} = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{v+5} \right) = \frac{1}{5}$$

γ) Είναι:

$$\frac{x^2 + 9x + 23}{x^2 + 9x + 20} = \frac{x^2 + 9x + 20 + 3}{x^2 + 9x + 20} = \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 9x + 20} + \frac{3}{x^2 + 9x + 20} = 1 + \frac{3}{x^2 + 9x + 20}$$

Από το υποερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{3}{x^2 + 9x + 20} = 3 \left(\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 5} \right)$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 9x + 23}{x^2 + 9x + 20} dx &= \int \left(1 + \frac{3}{x^2 + 9x + 20}\right) dx \\&= x + 3 \int \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}\right) dx \\&= x + 3(\ln|x+4| - \ln|x+5|) + c = x + 3\ln \left|\frac{x+4}{x+5}\right| + c\end{aligned}$$

A5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - xe^x = \ln x + \lambda$, $x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ:

A' ΤΡΟΠΟΣ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = e^x - xe^x - \ln x - \lambda, \quad x \in (0, +\infty), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έστω $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$ δύο τυχαίες πραγματικές λύσεις της $f(x) = 0$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Τότε:

- η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

Άρα, για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Έχουμε, ότι:

$$f'(x) = -xe^x - \frac{1}{x}$$

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\xi e^\xi - \frac{1}{\xi} = 0 \text{ αδύνατη, διότι } -\xi e^\xi - \frac{1}{\xi} < 0, \quad \forall \xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset \mathbb{R}^+.$$

Ατοπο. Επομένως δεν ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Rolle.

Άρα, αφού η $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, τότε θα έχει το πολύ μία λύση στο $(0, +\infty)$.

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = e^x - xe^x - \ln x - \lambda, \quad x \in (0, +\infty), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έχουμε, ότι:

$$f'(x) = -xe^x - \frac{1}{x} = -\left(xe^x + \frac{1}{x}\right) < 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα $\forall x \in (0, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

A6 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C): x^2 + y^2 = 4$ και η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής.

(Μονάδες 1)

β) Έστω $N(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, τυχαίο σημείο του κύκλου (C) και $\Sigma(x, y)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EN . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι κύκλος με εξίσωση $(C_1): (x - 1)^2 + y^2 = 1$.

(Μονάδες 2,5)

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων (C) και (C_1) .

(Μονάδες 1,5)

ΛΥΣΗ:

α) Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $y^2 = 4\alpha x$.

Επομένως,

$$4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Άρα η εστία της παραβολής είναι $E(2,0)$ και η διευθετούσα της $(\delta): x = -2$

β) Αφού $N(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ και $E(2,0)$, τότε οι συντεταγμένες του μέσου Σ είναι:

$$x_{\Sigma} = \frac{x_N + x_E}{2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta + 2}{2} = \sigma\upsilon\nu\theta + 1$$
$$y_{\Sigma} = \frac{y_N + y_E}{2} = \frac{2\eta\mu\theta + 0}{2} = \eta\mu\theta$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις, έχουμε ότι:

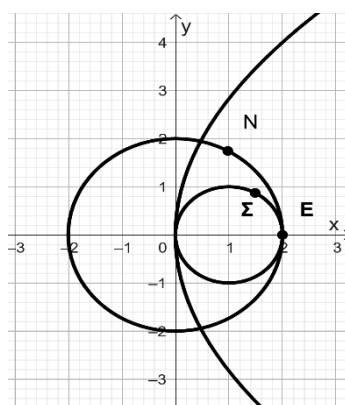
$$\sigma\upsilon\nu\theta = x_{\Sigma} - 1 \text{ και } \eta\mu\theta = y_{\Sigma}$$

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$(x_{\Sigma} - 1)^2 + y_{\Sigma}^2 = 1$$

Έχουμε αποδείξει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Σ επαληθεύουν την πιο πάνω εξίσωση. Επομένως, η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Σ είναι κύκλος με εξίσωση:

$$(C_1): (x - 1)^2 + y^2 = 1$$



γ) Ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 = 4$ έχει κέντρο το σημείο $K(0,0)$ και ακτίνα $R = 2 \mu$.

Ο κύκλος $(C_1): (x - 1)^2 + y^2 = 1$ έχει κέντρο το σημείο $K_1(1,0)$ και ακτίνα $R_1 = 1 \mu$.

Το μήκος της διακέντρου είναι $(KK_1) = \sqrt{(1 - 0)^2} = 1 \mu$.

Παρατηρούμε ότι $(KK_1) = 1 = |R - R_1|$. Επομένως, οι κύκλοι (C) και (C_1) εφάπτονται εσωτερικά.

A7 α) Έστω ότι X, Y είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(X' \cap Y') = P(X') \cdot P(Y')$$

β) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με

$$P(A) = 3P(A'), \quad P(B) = \frac{1}{2} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{7}{8},$$

να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' \cap B')$.

ΛΥΣΗ:

α) Αφού τα ενδεχόμενα X και Y είναι ανεξάρτητα, τότε $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$

Α' ΤΡΟΠΟΣ:

$$\begin{aligned} P(X' \cap Y') &= P(X \cup Y)' = 1 - P(X \cup Y) = 1 - P(X) - P(Y) + P(X \cap Y) \\ &= 1 - P(X) - P(Y) + P(X) \cdot P(Y) = (1 - P(X)) - P(Y)(1 - P(X)) \\ &= (1 - P(X))(1 - P(Y)) = P(X') \cdot P(Y') \end{aligned}$$

(αποδείχθηκε)

Β' ΤΡΟΠΟΣ:

$$\begin{aligned} P(X'|Y') &= \frac{P(X' \cap Y')}{P(Y')} = \frac{P(X') - P(X' \cap Y)}{P(Y')} \\ &= \frac{P(X') - [P(Y) - P(X \cap Y)]}{P(Y')} \\ &= \frac{P(X') - P(Y) + P(X)P(Y)}{P(Y')} = \frac{P(X') - P(Y)[1 - P(X)]}{P(Y')} \\ &= \frac{P(X') - P(Y)P(X')}{P(Y')} = \frac{P(X')[1 - P(Y)]}{P(Y')} = \frac{P(X')P(Y')}{P(Y')} = P(X') \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} P(X'|Y') &= \frac{P(X' \cap Y')}{P(Y')} = P(X') \\ \Rightarrow P(X' \cap Y') &= P(X')P(Y') \end{aligned}$$

(αποδείχθηκε)

β) Έχουμε

$$3P(A') = P(A) \Rightarrow 3(1 - P(A)) = P(A) \Rightarrow 3 - 3P(A) = P(A) \Rightarrow 4P(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$$

Αφού $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ και $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$, τότε ισχύει ότι

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Άρα τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα.

Από υποερώτημα (α), έχουμε ότι:

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = (1 - P(A))(1 - P(B)) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Εναλλακτικά:

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

A8 α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{τοξεφ}x > 1 - e^x, \quad \forall x > 0$$

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ}x + e^x - 1}{x}$$

(Μονάδες 2)

ΛΥΣΗ:

α)

A' ΤΡΟΠΟΣ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τοξεφ}x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η παράγωγος δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αφού $\frac{1}{1+x^2} > 0$ και $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, εξ' ορισμού ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \forall x > 0 &\Rightarrow f(x) > f(0) \\ \Rightarrow \text{τοξεφ}x + e^x - 1 &> \text{τοξεφ}0 + e^0 - 1 \\ &\Rightarrow \text{τοξεφ}x + e^x - 1 > 0 \\ &\Rightarrow \text{τοξεφ}x > 1 - e^x, \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

(αποδείχθηκε)

Β' ΤΡΟΠΟΣ:

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{cases} \text{τοξεφ}x > 0, \quad \forall x > 0 \\ e^x > 1, \quad \forall x > 0 \Rightarrow 1 - e^x < 0, \quad \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{τοξεφ}x > 1 - e^x, \quad \forall x > 0$$

β) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{τοξεφ}x + e^x - 1) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$. Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{τοξεφ}x + e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} + e^x \right) = 2$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ}x + e^x - 1}{x} = 2$$

A9 α) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx = e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c$$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + x \ln x \right) dx$$

ΛΥΣΗ:

α) Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx$$

Α΄ ΤΡΟΠΟΣ:

$$\begin{aligned} & \int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx \\ &= \int (e^{-x}f''(x) - e^{-x}f(x)) dx = \int e^{-x}f''(x) dx - \int e^{-x}f(x) dx \\ &= \int e^{-x}d(f'(x)) - \int e^{-x}f(x) dx = e^{-x}f'(x) - \int f'(x)d(e^{-x}) - \int e^{-x}f(x) dx \\ &= e^{-x}f'(x) - \int -e^{-x}f'(x) dx - \int e^{-x}f(x) dx \\ &= e^{-x}f'(x) + \int e^{-x}d(f(x)) - \int e^{-x}f(x) dx \\ &= e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x) - \int f(x)d(e^{-x}) - \int e^{-x}f(x) dx \\ &= e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x) + \int e^{-x}f(x) dx - \int e^{-x}f(x) dx \\ &= e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x) + c = e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c \end{aligned}$$

(αποδείχθηκε)

Εναλλακτικά:

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &= e^{-x}f'(x) + \int (e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x)) dx \\ &= e^{-x}f'(x) + \int (e^{-x}f(x))' dx \\ &= e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x) + c \\ &= e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c \end{aligned}$$

(αποδείχθηκε)

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ:

Παραγωγίζοντας το Β΄ μέλος της σχέσης:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c) \\ &= -e^{-x}(f'(x) + f(x)) + e^{-x}(f''(x) + f'(x)) \\ &= -e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) + e^{-x}f''(x) + e^{-x}f'(x) \end{aligned}$$

$$= e^{-x}(f''(x) - f(x))$$

Επομένως η σχέση $\int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx = e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c$ ισχύει.

β) Συγκρίνοντας το ολοκλήρωμα

$$\int e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + x \ln x \right) dx$$

Θεωρούμε ότι $f(x) = -x \ln x$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = -\ln x - 1 \text{ και } f''(x) = -\frac{1}{x}$$

Με βάση τη σχέση του υποερωτήματος (α) έχουμε:

$$\int e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + x \ln x \right) dx = e^{-x}(-\ln x - 1 - x \ln x) + c$$

Εναλλακτικά:

$$\int e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + x \ln x \right) dx = - \int e^{-x} \left(\frac{1}{x} - x \ln x \right) dx$$

Θεωρούμε ότι $f(x) = x \ln x$.

A10 α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx = \pi + 2, \quad x = 2\sqrt{2}\eta\mu\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{8-x^2}$, την καμπύλη $y = x^3 + 4$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $x = 2$.

ΛΥΣΗ:

α) Αν $x = 2\sqrt{2}\eta\mu\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, τότε $dx = 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ και:

$$\sqrt{8-x^2} = \sqrt{8-8\eta\mu^2\theta} = \sqrt{8(1-\eta\mu^2\theta)} = \sqrt{8\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 2\sqrt{2}|\sigma\upsilon\nu\theta| = 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta$$

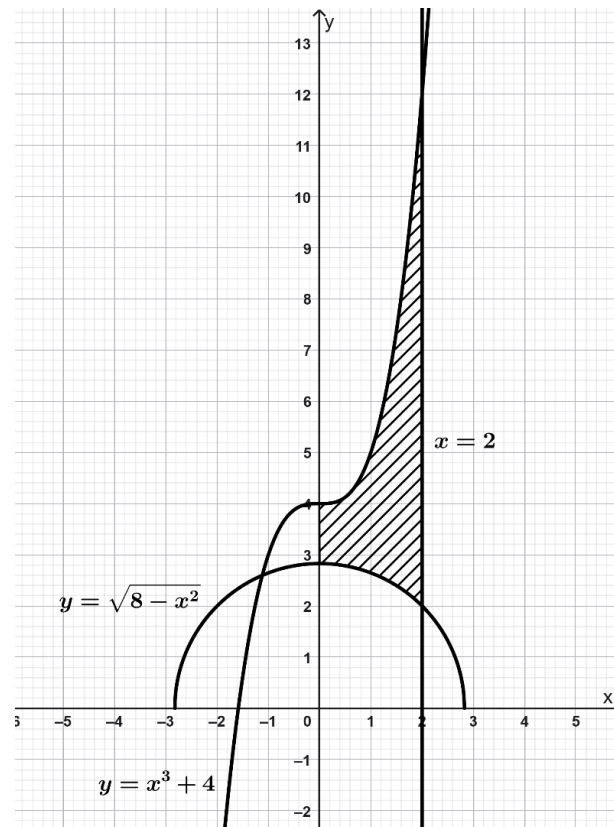
$$(\sigma\upsilon\nu\theta > 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$$

$$\text{Av } x = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\text{Av } x = 2 \Rightarrow 2\sqrt{2}\eta\mu\theta = 2 \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta \cdot 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} d\theta \\ &= 4 \left(\theta + \frac{\eta\mu 2\theta}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta\mu \frac{\pi}{2}}{2} - 0 \right) = 4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \pi + 2 \end{aligned}$$

β)



Σύμφωνα με τη γραφική παράσταση έχουμε:

$$E = \int_0^2 \left((x^3 + 4) - \sqrt{8 - x^2} \right) dx = \int_0^2 (x^3 + 4) dx - \int_0^2 \sqrt{8 - x^2} dx$$

Από υποερώτημα (α):

$$E = \left[\frac{x^4}{4} + 4x \right]_0^2 - (\pi + 2) = (4 + 8 - 0) - \pi - 2 = (10 - \pi) \text{ τ.μ.}$$

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τους άξονες των συντεταγμένων.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 1-2-2-2-2-1)

ΛΥΣΗ:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{1\}$.

Σημεία τομής με τους άξονες:

$$x = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Επομένως, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το $(0,0)$.

β) Διαστήματα μονοτονίας- τοπικά ακρότατα:

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2, \quad x \neq 1''$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου για την f' .

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, 2]$.

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 0$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$, το $f(2) = 4$.

γ) Διαστήματα κυρτότητας - σημεία καμπής:

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Επομένως, η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου για την f'' .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$f(x)$		$\parallel$	

Παρατηρούμε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο $(1, +\infty)$.

δ) Εύρεση ασύμπτωτων:

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$, επομένως εξετάζουμε τη συμπεριφορά της στο $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \Rightarrow \beta = 1$$

Ομοίως,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \Rightarrow \beta = 1$$

Επομένως, η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στις περιοχές των $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

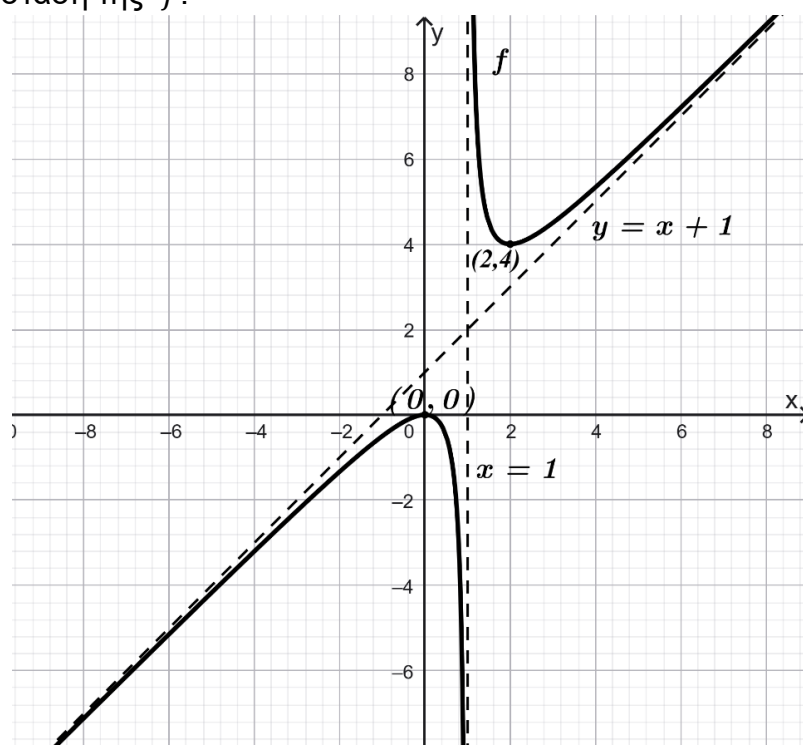
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0, \quad x-1 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, \quad x-1 > 0$$

Επομένως, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

ε) Γραφική παράσταση της f :



στ) Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, για τις διάφορες τιμές του κ είναι:

- Δύο, όταν $\kappa \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
- Μία, όταν $\kappa = 0$ και $\kappa = 4$
- Καμία, όταν $\kappa \in (0, 4)$

B2 Έστω συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x - y = 2$ εφαπτόμενη της γραφικής παράστασής της στο σημείο $(3, f(3))$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x > -1$$

ΛΥΣΗ:

Το σημείο $(3, f(3))$ είναι σημείο της ευθείας $(\varepsilon) \Rightarrow 3 \cdot 3 - y = 2 \Rightarrow y = 7$.

Επομένως, $f(3) = 7$.

Η κλίση της ευθείας $3x - y = 2$ είναι $\lambda_\varepsilon = 3$.

Η ευθεία (ε) εφάπτεται της c_f στο σημείο $(3, f(3)) \Rightarrow f'(3) = \lambda_\varepsilon \Rightarrow f'(3) = 3$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x > -1 \Rightarrow f'(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \Rightarrow f'(x) = \int (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \Rightarrow f'(x) = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c_1 \\ f'(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = 2(3+1)^{\frac{1}{2}} + c_1 \Rightarrow c_1 = -1$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow f(x) = \int \left(2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) dx \Rightarrow f(x) = 2 \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + c_2 \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x + c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x + c_2 \\ f(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow 7 = \frac{4}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - 3 + c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{2}{3}$$

Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x - \frac{2}{3}$$

B3 Ένα κουτί περιέχει 10 όμοιες μπάλες από τις οποίες οι 7 είναι κόκκινες και οι 3 είναι πράσινες. Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες τυχαία από το κουτί. Αν η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τότε χωρίς να την επανατοποθετήσουμε στο κουτί παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα. Ενώ, αν η πρώτη μπάλα είναι πράσινη, τότε την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήραμε να είναι πράσινη. **(Μονάδες 6)**

β) Αν η δεύτερη μπάλα που πήραμε είναι πράσινη, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήραμε να είναι κόκκινη; **(Μονάδες 4)**

ΛΥΣΗ:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

K_i : «Παίρνουμε κόκκινη μπάλα στην i –προσπάθεια», $i = 1, 2$

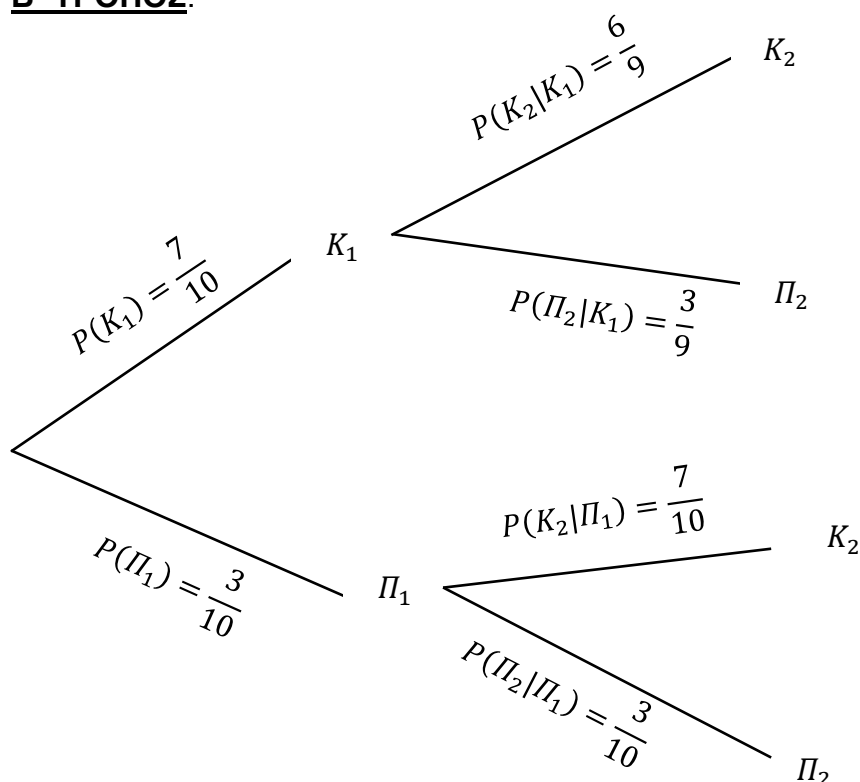
Π_i : «Παίρνουμε πράσινη μπάλα στην i –προσπάθεια», $i = 1, 2$

A' ΤΡΟΠΟΣ:

α)

$$\begin{aligned} P(\Pi_2) &= P(\Pi_1 \cap \Pi_2) + P(K_1 \cap \Pi_2) \\ &= P(\Pi_1) \cdot P(\Pi_2|\Pi_1) + P(K_1) \cdot P(\Pi_2|K_1) \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{97}{300} \end{aligned}$$

B' ΤΡΟΠΟΣ:



$$\begin{aligned}
 P(\Pi_2) &= P(\Pi_1 \cap \Pi_2) + P(K_1 \cap \Pi_2) \\
 &= P(\Pi_1) \cdot P(\Pi_2|\Pi_1) + P(K_1) \cdot P(\Pi_2|K_1) \\
 \Rightarrow P(\Pi_2) &= \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{97}{300}
 \end{aligned}$$

β)

$$P(K_1|\Pi_2) = \frac{P(K_1 \cap \Pi_2)}{P(\Pi_2)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{97}{300}} = \frac{\frac{21}{90}}{\frac{97}{300}} = \frac{70}{97}$$

B4 Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t \neq 0$. Στο σημείο A φέρουμε εφαπτόμενη (ε) η οποία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο Γ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) είναι:

$$(\varepsilon): ty = x + t^2$$

(Μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Δ για το οποίο το $BO\Gamma\Delta$ (όπου O η αρχή των αξόνων) είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, είναι η παραβολή $y^2 = -x$.

(Μονάδες 3)

γ) Θεωρούμε ότι το σημείο $A(t^2, 2t)$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ($t > 0$). Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = -x$, τον άξονα των τεταγμένων και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_1 . Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4x$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία (ε) , περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_2 . Να αποδείξετε ότι:

$$V_1 = 3 V_2$$

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

$$\alpha) y^2 = 4x \Rightarrow 2yy' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}, \quad y \neq 0$$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{dy}{dx} \Big|_A = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}, \quad t \neq 0$$

Επομένως, η κλίση της εφαπτόμενης στο A είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{1}{t}$, $A(t^2, 2t)$
Εξίσωση εφαπτόμενης στο A , (ε) :

$$y - 2t = \frac{1}{t}(x - t^2) \Leftrightarrow ty - 2t^2 = x - t^2 \Leftrightarrow ty = x + t^2$$

(αποδείχθηκε)

β) Η εφαπτόμενη (ε) τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $B(0, t)$ και τον άξονα της στο σημείο $\Gamma(-t^2, 0)$.

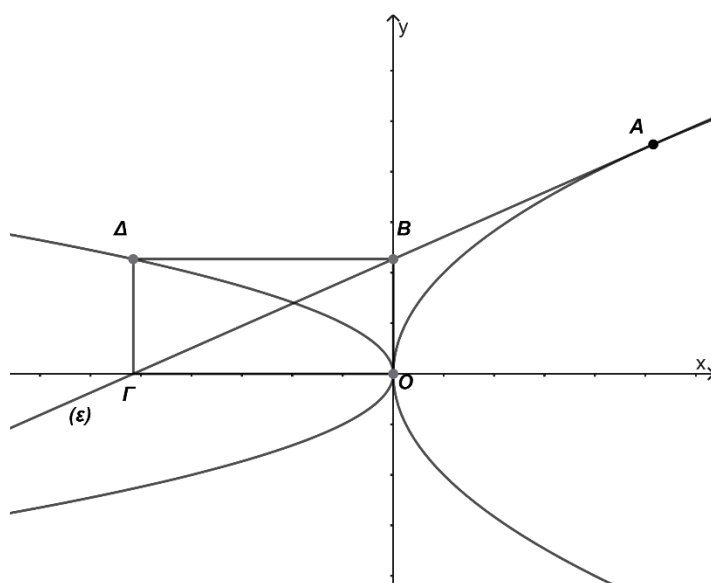
Άρα, οι συντεταγμένες του σημείου Δ , έτσι ώστε το σχήμα $BO\Gamma\Delta$ να είναι ορθογώνιο, είναι $\Delta(-t^2, t)$.

$$\begin{cases} x = -t^2 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow y^2 = -x$$

Άρα, η εξίσωση του σχήματος, στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Δ , είναι η παραβολή $y^2 = -x$.

γ) Έστω T_1 το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = -x$, τον άξονα των τεταγμένων και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$ και T_2 το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4x$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία (ε) .
Έστω V_1 ο όγκος που παράγεται από το χωρίο T_1 και V_2 ο όγκος που παράγεται από το χωρίο T_2 .

$$y^2 = -x \Leftrightarrow x_1 = -y^2$$



$$V_1 = \pi \int_0^t x_1^2 dy = \pi \int_0^t (-y^2)^2 dy = \pi \int_0^t y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^t = \pi \left(\frac{t^5}{5} - 0 \right)$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{t^5}{5} \pi \text{ κ.μ.}$$

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow x_2 = \frac{y^2}{4} \text{ και } (\varepsilon): ty = x + t^2 \Leftrightarrow x_{(\varepsilon)} = ty - t^2$$

$$V_2 = \pi \int_0^{2t} x_2^2 dy - \pi \int_t^{2t} x_{(\varepsilon)}^2 dy = \pi \int_0^{2t} \left(\frac{y^2}{4} \right)^2 dy - \pi \int_t^{2t} (ty - t^2)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{2t} \frac{y^4}{16} dy - \pi t^2 \int_t^{2t} (y - t)^2 dy = \pi \left[\frac{y^5}{80} \right]_0^{2t} - \pi t^2 \left(\frac{(y - t)^3}{3} \right)_t^{2t}$$

$$= \frac{2t^5}{5} \pi - \frac{t^5}{3} \pi = \frac{t^5}{15} \pi \text{ κ.μ.} \Rightarrow V_2 = \frac{t^5}{15} \pi \text{ κ.μ.}$$

Εναλλακτικά:

$$V_2 = \pi \int_0^{2t} x_2^2 dy - V_{\kappa\omega\nu\nu}$$

$$V_{\kappa\omega\nu\nu} = \frac{\pi R^2 v}{3} = \frac{\pi (t^2)^2 \cdot (2t - t)}{3} = \frac{\pi t^5}{3} \text{ κ.μ.}$$

Επομένως,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{t^5}{5} \pi}{\frac{t^5}{15} \pi} = 3 \Rightarrow V_1 = 3V_2$$

(αποδείχθηκε)

B5 Η ευθεία που διέρχεται του σημείου $K(7, 3)$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο M και την ευθεία $y = x$ στο πρώτο τεταρτημόριο στο σημείο N . Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OMN (όπου O η αρχή των αξόνων) να είναι ελάχιστο.

ΛΥΣΗ:

Α΄ ΤΡΟΠΟΣ:

Έστω $M(x_M, 0)$

N σημείο της ευθείας $y = x$, επομένως $N(\alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$

Τα σημεία $N(\alpha, \alpha)$, $M(x_M, 0)$ και $K(7, 3)$ είναι συνευθειακά, άρα

$$\lambda_{NK} = \lambda_{KM} \Leftrightarrow \frac{\alpha - 3}{\alpha - 7} = \frac{3}{7 - x_M} \quad (\alpha \neq 7, x_M \neq 7)$$

$$\Leftrightarrow x_M = \frac{4\alpha}{\alpha - 3} > 0$$

$\alpha > 0$ και $x_M > 0$, επομένως $\alpha - 3 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 3$

$$E_{\tauριγ.OMN} = \frac{|x_M||y_N|}{2} = \frac{x_M \cdot y_N}{2} = \frac{\frac{4\alpha}{\alpha - 3} \cdot \alpha}{2} = \frac{2\alpha^2}{\alpha - 3}$$

$$\Rightarrow E_{\tauριγ.OMN}(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{\alpha - 3}, \quad \alpha > 3$$

Εναλλακτικά εύρεση εμβαδού:

$$E_{\tauριγ.OMN} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4\alpha}{\alpha - 3} & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4\alpha^2 \\ \alpha - 3 \end{vmatrix} = \frac{2\alpha^2}{\alpha - 3}, \quad (\alpha \text{ αφού } \alpha > 3)$$

Σημείωση: Η συνάρτηση $E_{\tauριγ.OMN}$ ισχύει και για $\alpha = 7$, δηλαδή

$$E_{\tauριγ.OMN}(7) = \frac{49}{2} \text{ τ. μ.}$$

Η συνάρτηση $E_{\tauριγ.OMN}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(3, +\infty)$.

Έχουμε, ότι:

$$E'_{\tauριγ.OMN}(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha - 6)}{(\alpha - 3)^2}$$

$$E'_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 6 \text{ και } \alpha \neq 3$$

α	$3''$	6	$+\infty$
$E'_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}(\alpha)$	$ $	$-$	0 $+$
$E_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}(\alpha)$	$ $	$\searrow$	$\nearrow$

Από τον πίνακα προσήμου παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση του $E_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(3,6]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[6,+\infty)$
- Το $E_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}$ γίνεται ελάχιστο στο $\alpha = 6$ (το μοναδικό κρίσιμο σημείο) στο $(3,+\infty)$

$$x_M = \frac{4 \cdot 6}{6 - 3} = 8$$

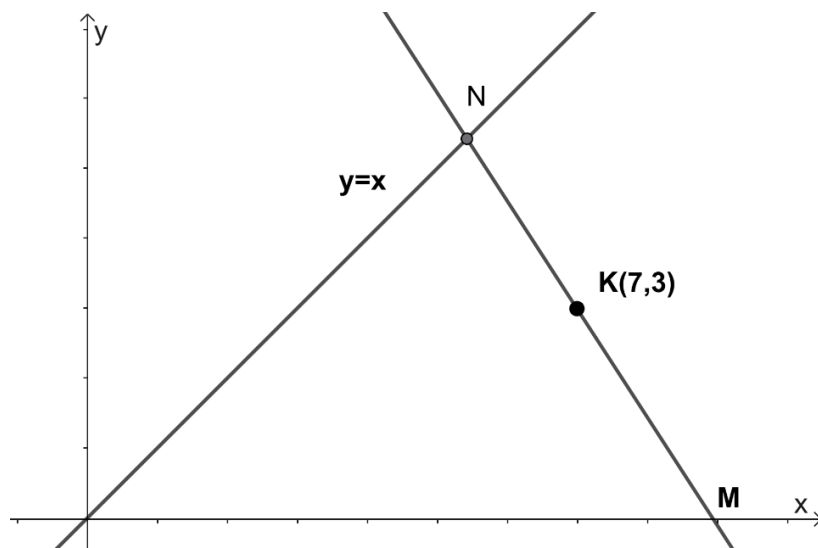
Επομένως, $N(6,6)$ και $M(8,0)$

Εναλλακτικά, εύρεση του x_M :

Εύρεση εξίσωση ευθείας NM :

$$\lambda_{NK} = \frac{\alpha-3}{\alpha-7}, \quad K(7,3), \quad \alpha \neq 7$$

$$\text{Άρα, } \begin{cases} y - 3 = \frac{\alpha-3}{\alpha-7}(x - 7) \\ M(x_M, 0) \end{cases} \Rightarrow x_M = \frac{4\alpha}{\alpha-3} > 0$$



Β' ΤΡΟΠΟΣ:

Θεωρούμε ότι η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη και έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Αφού το σημείο $K(7,3)$ ανήκει στην ευθεία τότε:

$$3 = 7\lambda + \beta \Rightarrow \beta = 3 - 7\lambda$$

Για την εύρεση του σημείου M :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \lambda x + \beta \end{cases} \Rightarrow x_M = -\frac{\beta}{\lambda} \Rightarrow x_M = \frac{7\lambda - 3}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0$$

Αρα, $M\left(\frac{7\lambda-3}{\lambda}, 0\right)$

Αφού N σημείο της ευθείας $y = x$, τότε $N(x, x)$.

Για την εύρεση του σημείου N :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \lambda x + \beta \end{cases} \Rightarrow x_N = \lambda x_N + \beta \Rightarrow x_N = \frac{\beta}{1-\lambda} = \frac{3-7\lambda}{1-\lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

Αρα, $N\left(\frac{3-7\lambda}{1-\lambda}, \frac{3-7\lambda}{1-\lambda}\right)$

Θέλουμε $x_M > 0$ και $x_N > 0$. Δηλαδή:

$$\frac{7\lambda - 3}{\lambda} > 0 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{7}, +\infty\right)$$

και

$$\frac{3 - 7\lambda}{1 - \lambda} > 0 \Rightarrow \lambda \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right) \cup (1, +\infty)$$

Επομένως, $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Αν E είναι το εμβαδόν του τριγώνου OMN , τότε:

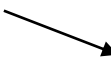
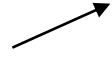
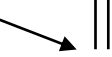
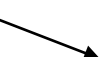
$$E_{\text{τριγ.}OMN} = \frac{|x_M||y_N|}{2} = \frac{x_M \cdot y_N}{2} = \frac{\left(\frac{7\lambda-3}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{3-7\lambda}{1-\lambda}\right)}{2} = \frac{(7\lambda-3)^2}{2\lambda(\lambda-1)},$$

$$\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

Έχουμε ότι:

$$E'_{\text{τριγ.}OMN}(\lambda) = -\frac{(7\lambda-3)(\lambda+3)}{2\lambda^2(\lambda-1)^2}, \quad \lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$E'_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7} (\text{απορ.}) \text{ ή } \lambda = -3 (\text{δεκτή}), \lambda \neq 0, \lambda \neq 1$$

α	-3		$0''$		$\frac{3}{7}$	1		$+\infty$	
$E'_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}(\alpha)$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$E_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}(\alpha)$									

Το διάστημα $[0,1]$ είναι εκτός πεδίου ορισμού.

Το $E_{\tau\rho\iota\gamma.OMN}$ γίνεται ελάχιστο στο $\lambda = -3$ με $E(-3) = \frac{576}{24}$ τ.μ.

Όταν η ευθεία είναι κατακόρυφη, τότε η τιμή του εμβαδού ισούται με $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda)$.

Επομένως:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(7\lambda - 3)^2}{2\lambda(\lambda - 1)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{49\lambda^2}{2\lambda^2} = \frac{49}{2}$$

Αφού $E(-3) < \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda)$, το $\lambda = -3$ δίνει ολικό ελάχιστο.

Επομένως, το εμβαδόν είναι ελάχιστο όταν $\lambda = -3$.

Επομένως, $N(6,6)$ και $M(8,0)$.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ