ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΠΕΜΠΤΗ 16 ΜΑΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3ΩΡΟ ΚΚ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ0043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
3. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για σχήματα, πίνακες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται **όλη η αναγκαία εργασία**.
9. Επισυνάπτεται τυπολόγιο δύο (2) σελίδων.

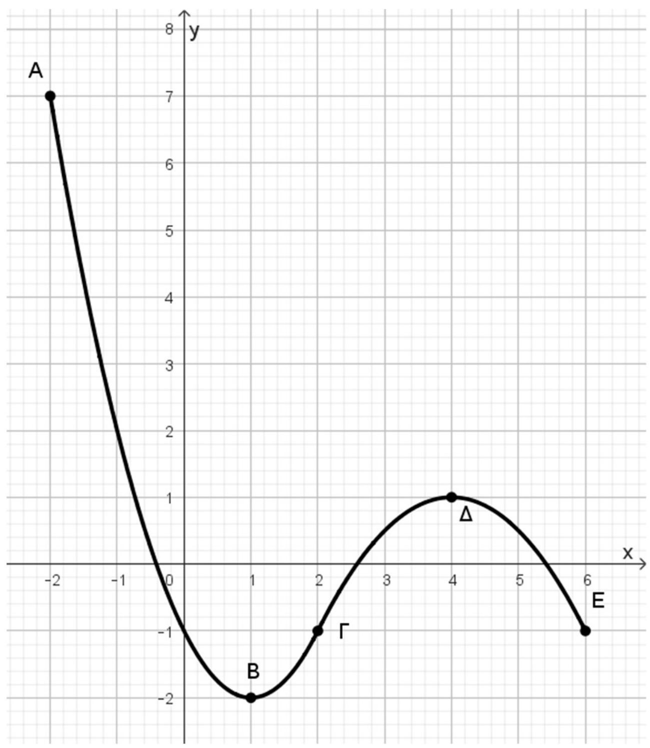
ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Να υπολογίσετε τον όγκο κυλίνδρου που έχει ακτίνα $R = 10\ cm$ και ύψος $\upsilon = 8\ cm$. (Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π)

Α2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [-2,6] \rightarrow [-2,7]$, η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής το $\Gamma(2,-1)$. Με βάση τη γραφική παράσταση να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:



(α) Η τιμή $f(1) = -2$ είναι:

(i) ολικά ελάχιστη (ii) ολικά μέγιστη (iii) τοπικά μέγιστη

(β) Η τιμή $f'(4)$ είναι:

(i) θετική (ii) αρνητική (iii) ίση με μηδέν

(γ) Ισχύει ότι $f''(x) > 0, \forall x \in$:

(i) $[-2,4]$ (ii) $[1,4]$ (iii) $[-2,2)$

(δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα:

(i) $[-2,2]$ (ii) $[-2,1]$ (iii) $[4,6]$

Να μεταφέρετε τις απαντήσεις σας στο τετράδιο απαντήσεων.

Α3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 5, x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 2$, να υπολογίσετε την τιμή του α.

Α4. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει:

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad \text{και } P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A')$ **(μονάδες 3)**

(β) $P(A - B)$ **(μονάδες 3)**

(γ) $P(A \cup B)$ **(μονάδες 4)**

Α5. Μια ομάδα 15 μαθητών Γ΄ έτους μιας Τεχνικής Σχολής θα ταξιδέψουν για μια εκπαιδευτική εκδρομή στην Ελλάδα. Υποψήφιοι για την εκδρομή είναι 10 μαθητές από τη Θεωρητική Κατεύθυνση και 8 μαθητές από την Πρακτική Κατεύθυνση. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί η ομάδα των μαθητών που θα λάβουν μέρος στην εκδρομή, αν:

(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός **(μονάδες 4)**

(β) θα λάβουν μέρος τουλάχιστον επτά (7) μαθητές από κάθε κατεύθυνση. **(μονάδες 6)**

Α6. Τα ημερήσια έσοδα ενός θεματικού πάρκου (σε ευρώ), από τις πωλήσεις των εισιτήριων, δίνονται από τη συνάρτηση

$$f(x) = -4x^2 + 96x + 110, \quad 0 < x < 50$$

όπου x η τιμή του εισιτηρίου (σε ευρώ).

Να υπολογίσετε:

(α) την τιμή του εισιτηρίου για την οποία το πάρκο θα έχει τα μέγιστα δυνατά ημερήσια έσοδα **(μονάδες 8)**

(β) τα μέγιστα δυνατά ημερήσια έσοδα του πάρκου. **(μονάδες 2)**

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>: Βαθμολογείται με 40 μονάδες. Αποτελείται από 3 ασκήσεις.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες,
ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τυπο $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, αφού πρώτα βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη ή κυρτή και τη συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

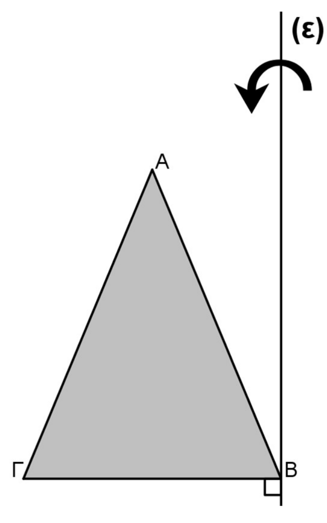
Β2. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4$ σχηματίζουμε οκταψήφιους αριθμούς.

(α) Να βρείτε πόσους διαφορετικούς οκταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε. **(μονάδες 5)**

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς έχουν τα $2, 2, 2$ σε συνεχόμενες θέσεις; **(μονάδες 5)**

(γ) Καταγράφουμε κάθε έναν από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) σε χαρτάκι (έναν αριθμό σε κάθε χαρτάκι). Επιλέγουμε στην τύχη ένα χαρτάκι. Ποια η πιθανότητα ο αριθμός που αναγράφεται στο χαρτάκι να είναι περιττός; **(μονάδες 5)**

Β3. Ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $ΑΒ = ΑΓ = 13\ cm$ και $ΒΓ = 10\ cm$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία $(ε)$ η οποία διέρχεται από το $Β$ και είναι κάθετη στην πλευρά $ΒΓ$. Να υπολογίσετε:



(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $(Εολ)$ του στερεού που παράγεται **(μονάδες 10)**

(β) τον όγκο (V) του στερεού που παράγεται. **(μονάδες 5)**
(Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \text{ ή } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$ημ(Α \pm Β) = ημΑσυνΒ \pm συνΑημΒ$ $\quad$ $συν(Α \pm Β) = συνΑσυνΒ \mp ημΑημΒ$

$2ημα \cdot συνβ = ημ(α - β) + ημ(α + β)$ $\quad$ $2συνα \cdot συνΒ = συν(α - β) + συν(α + β)$

$2\, ημα \cdot ημβ = συν(α - β) - συν(α + β)$

$ημ2α = 2ημα \cdot συνα$ $\quad$ $συν2α = συν^2α - ημ^2α$

$ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2}$ $\quad$ $συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$

$ημ2α = \frac{2t}{1 + t^2}$ $\quad$ $συν2α = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ $\quad$ $t = εφα$

$ημΑ + ημΒ = 2ημ\frac{Α + Β}{2} συν\frac{Α - Β}{2}$ $\quad$ $ημΑ - ημΒ = 2\,ημ\frac{Α - Β}{2}συν\frac{Α + Β}{2}$

$συνΑ + συνΒ = 2\,συν\frac{Α + Β}{2}συν\frac{Α - Β}{2}$ $\quad$ $συνΑ - συνΒ = 2\,ημ\frac{Β - Α}{2}ημ\frac{Α + Β}{2}$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$ημx = ημα$	$x = 360^o κ + α$ ή $x = 360^o κ + 180^o - α, \quad κ \in \mathbb{Z}$	$x = 2πκ + α$ ή $x = 2πκ + π - α, \quad κ \in \mathbb{Z}$
$συνx = συνα$	$x = 360^o κ \pm α, \quad κ \in \mathbb{Z}$	$x = 2πκ \pm α, \quad κ \in \mathbb{Z}$
$εφx = εφα$	$x = 180^o\, κ + α, \quad κ \in \mathbb{Z}$	$x = πκ + α, \quad κ \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό Πρίσμα	$E_\pi = \Pi_\beta \cdot υ$	$V = E_\beta . υ$
Κανονική Πυραμίδα	$E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta \cdot h$	$V = \frac{E_\beta . υ}{3}$
Κύλινδρος	$E_\kappa = 2\pi R υ$	$V = \pi R^2 υ$
Κώνος	$E_\kappa = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 υ}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda$	$V = \frac{\pi υ}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

΄Ελλειψη

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$

Εστίες $(\pm\gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$,

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ $\quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ $\quad (\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. Ολοκληρώματα

$\int \tau\varepsilon\mu x\, dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c$ $\quad \int \sigma\tau\varepsilon\mu x\, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu\frac{x}{\alpha} + c$ $\quad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi\, \frac{x}{\alpha} + c$

7. Απλός Τόκος

$T = \frac{K.E.X}{100}$