ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023-2024

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16/5/2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3ΩΡΟ ΚΚ (Α΄ ΣΕΙΡΑ)

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ0043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

Προτεινόμενες ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

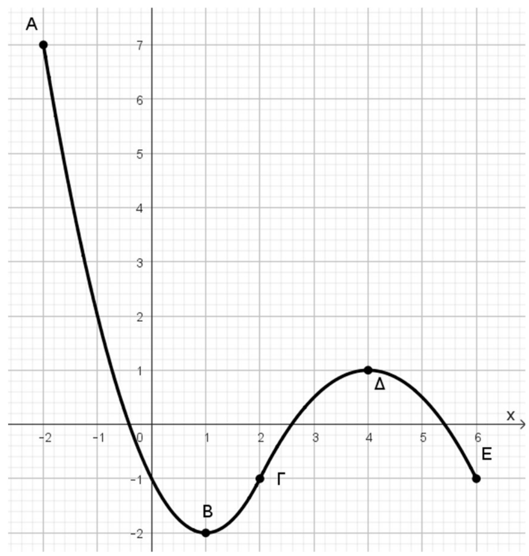
Α1. Να υπολογίσετε τον όγκο κυλίνδρου που έχει ακτίνα $R = 10\ cm$ και ύψος $\upsilon = 8\ cm$. (Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π)

Προτεινόμενη Λύση

Ο όγκος κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi R^2 \upsilon$$
$$= \pi \cdot 10^2 \cdot 8$$
$$V = 800\pi\ cm^3$$

Α2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [-2,6] \to [-2,7]$, η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής το $\Gamma(2,-1)$. Με βάση τη γραφική παράσταση να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:



(α) Η τιμή $f(1) = -2$ είναι:
(i) ολικά ελάχιστη (ii) ολικά μέγιστη (iii) τοπικά μέγιστη

(β) Η τιμή $f'(4)$ είναι:
(i) θετική (ii) αρνητική (iii) ίση με μηδέν

(γ) Ισχύει ότι $f''(x) > 0, \forall x \in$:
(i) $[-2,4]$ (ii) $[1,4]$ (iii) $[-2,2)$

(δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα:
(i) $[-2,2]$ (ii) $[-2,1]$ (iii) $[4,6]$

Να μεταφέρετε τις απαντήσεις σας στο τετράδιο απαντήσεων.

Προτεινόμενη Λύση

(α) (i) ολικά ελάχιστη
(β) (iii) ίση με μηδέν
(γ) (iii) $[-2,2)$
(δ) (ii)$[-2,1]$

A3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 5, x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 2$, να υπολογίσετε την τιμή του α.

Προτεινόμενη Λύση

Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f:

$$f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 6x - 2\alpha, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 2$, επομένως ισχύει ότι $f''(2) = 0$

$$\Rightarrow \ 6 \cdot 2 - 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 12 = 2\alpha \ \Leftrightarrow \ \alpha = 6$$

A4. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει:

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad \text{και } P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A')$ **(μονάδες 3)**

(β) $P(A - B)$ **(μονάδες 3)**

(γ) $P(A \cup B)$ **(μονάδες 4)**

Προτεινόμενη Λύση

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad \text{και } P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους των πιθανοτήτων, έχουμε:

(α)

$$\begin{aligned} P(A') &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Α5. Μια ομάδα 15 μαθητών Γ΄ έτους μιας Τεχνικής Σχολής θα ταξιδέψουν για μια εκπαιδευτική εκδρομή στην Ελλάδα. Υποψήφιοι για την εκδρομή είναι 10 μαθητές από τη Θεωρητική Κατεύθυνση και 8 μαθητές από την Πρακτική Κατεύθυνση. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί η ομάδα των μαθητών που θα λάβουν μέρος στην εκδρομή, αν:

(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός **(μονάδες 4)**

(β) θα λάβουν μέρος τουλάχιστον επτά (7) μαθητές από κάθε κατεύθυνση.

(μονάδες 6)

Προτεινόμενη Λύση

(α) Αν δεν υπάρχει περιορισμός, τότε οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να συγκροτηθεί η ομάδα των μαθητών που θα λάβουν μέρος στην εκδρομή είναι:

$$\binom{18}{15} = \frac{18!}{(18-15)! \cdot 15!} = \frac{18!}{3! \cdot 15!} = 816$$

(β) Εδώ έχουμε δύο περιπτώσεις.

<u>1η περίπτωση:</u> Να έχουμε 7 μαθητές από τη Θεωρητική Κατεύθυνση και 8 μαθητές από την Πρακτική Κατεύθυνση.

Αυτό μπορεί να γίνει (χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική αρχή) με

$$\binom{10}{7} \cdot \binom{8}{8} = \frac{10!}{(10-7)! \cdot 7!} \cdot \frac{8!}{(8-8)! \cdot 8!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{8!}{0! \cdot 8!} = $$
$$= 120 \text{ τρόπους.}$$

<u>2η περίπτωση:</u> Να έχουμε 8 μαθητές από την Θεωρητική Κατεύθυνση και 7 μαθητές από την Πρακτική Κατεύθυνση.

Αυτό μπορεί να γίνει (χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική αρχή) με

$$\binom{10}{8} \cdot \binom{8}{7} = \frac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{(8-7)! \cdot 7!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{1! \cdot 7!} = $$
$$= 360 \text{ τρόπους.}$$

Από την αρχή του αθροίσματος έχουμε συνολικά

$$120 + 360 = 480 \text{ τρόπους.}$$

A6. Τα ημερήσια έσοδα ενός θεματικού πάρκου (σε ευρώ), από τις πωλήσεις των εισιτήριων, δίνονται από τη συνάρτηση

$$f(x) = -4x^2 + 96x + 110, \quad 0 < x < 50$$

όπου x η τιμή του εισιτηρίου (σε ευρώ).

Να υπολογίσετε:

(α) την τιμή του εισιτηρίου για την οποία το πάρκο θα έχει τα μέγιστα δυνατά ημερήσια έσοδα **(μονάδες 8)**

(β) τα μέγιστα δυνατά ημερήσια έσοδα του πάρκου. **(μονάδες 2)**

Προτεινόμενη Λύση

(α) Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f:

$$f'(x) = -8x + 96, \quad 0 < x < 50$$

Θέτουμε $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$$-8x + 96 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-8x = -96 \quad \Leftrightarrow$$

$x = 12$ (δεκτή)

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας της f:

x	0		12		50
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$T.M.$	↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,12]$
και γνησίως φθίνουσα στο $[12, 50)$ άρα,
η συνάρτηση
παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = 12$.
Επομένως τα ημερήσια έσοδα του πάρκου μεγιστοποιούνται όταν η τιμή του εισιτηρίου είναι 12 ευρώ.

(β) Για $x = 12$ υπολογίζουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f:

$$f(12)$$

$$f(12) = -4 \cdot 12^2 + 96 \cdot 12 + 110$$

$$= -576 + 1152 + 110 = 686$$

Επομένως τα μέγιστα δυνατά ημερήσια έσοδα του πάρκου είναι 686 ευρώ

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>: Βαθμολογείται με 40 μονάδες. Αποτελείται από 3 ασκήσεις.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες,
ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τυπο $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, αφού πρώτα βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη ή κυρτή και τη συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Προτεινόμενη Λύση

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$ (πολυωνυμική συνάρτηση)

Σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(0) = -5 \quad \Rightarrow \quad (0, -5)$$

$$y = 0 \Rightarrow \; x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; (x-5)(x+1) = 0 \; \Rightarrow \; x = 5 \text{ ή } x = -1$$

$$\Rightarrow \quad (5,0)\,, \quad (-1,0)$$

Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \; \Rightarrow$$

$$2x - 4 = 0 \; \Leftrightarrow \; x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$T.E.$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$, την τιμή $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$

Κυρτότητα:

$$f'(x) = 2x - 4 \; \Rightarrow \; f''(x) = 2 > 0, \; \forall x \in \mathbb{R} \; \Rightarrow$$

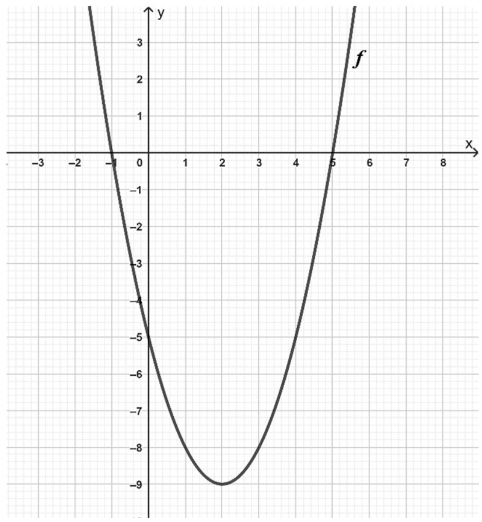
η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 4x - 5) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x - 5) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Γραφική Παράσταση:



Β2. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4$ σχηματίζουμε οκταψήφιους αριθμούς.

(α) Να βρείτε πόσους διαφορετικούς οκταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε. **(μονάδες 5)**

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς έχουν τα $2, 2, 2$ σε συνεχόμενες θέσεις; **(μονάδες 5)**

(γ) Καταγράφουμε κάθε έναν από τους αριθμούς του ερωτήματος (α) σε χαρτάκι (έναν αριθμό σε κάθε χαρτάκι). Επιλέγουμε στην τύχη ένα χαρτάκι. Ποια η πιθανότητα ο αριθμός που αναγράφεται στο χαρτάκι να είναι περιττός; **(μονάδες 5)**

Προτεινόμενη Λύση

(α) Οι διαφορετικοί οκταψήφιοι που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι όσοι και το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων των 8 αντικειμένων με 2 άσσους, 3 δυάρια και 2 τριάρια, δηλαδή:

$$M_8^{\varepsilon} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$
$$= \frac{40320}{2 \cdot 6 \cdot 2} = 1680$$

(β) Θεωρούμε τα $2, 2, 2$ σαν ένα αντικείμενο.

$$1, 1, \boxed{2, 2, 2}, 3, 3, 4$$

Άρα το πλήθος των ζητούμενων οκταψήφιων που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι:

$$M_6^{\varepsilon} \cdot M_3^{\varepsilon} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{3!} =$$

$$\frac{720}{2 \cdot 2} \cdot 1 = 180$$

(γ) Θα υπολογίσουμε το πλήθος των περιττών οκταψήφιων που μπορούν να κατασκευαστούν με τα πιο πάνω ψηφία. Για να είναι περιττός θα πρέπει να τελειώνει σε 1 ή 3.

<u>1η περίπτωση:</u> Να τελειώνει σε 1, άρα μεταθέτουμε τα υπόλοιπα 7 ψηφία:
$1, 2, 2, 2, 3, 3, 4$

$$M_7^{\varepsilon} = \frac{7!}{3! \cdot 2!}$$

$= \frac{5040}{6 \cdot 2} = 420$ οκταψήφιους που τελειώνουν σε 1.

<u>2η περίπτωση:</u> Να τελειώνει σε 3, άρα μεταθέτουμε τα υπόλοιπα 7 ψηφία:
$1, 1, 2, 2, 2, 3, 4$

$$M_7^{\varepsilon} = \frac{7!}{3! \cdot 2!}$$

$= \frac{5040}{6 \cdot 2} = 420$ οκταψήφιους που τελειώνουν σε 3.

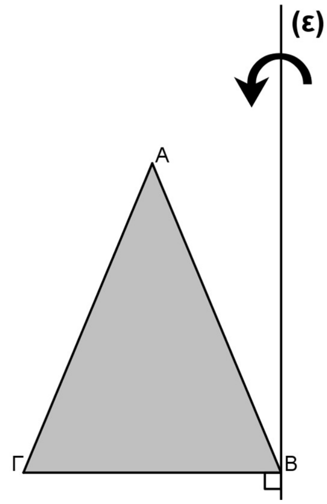
Άρα συνολικά $420 + 420 = 840$
περιττούς οκταψήφιους με τα πιο πάνω ψηφία.

Ορίζουμε το ενδεχόμενο
Π: «ο αριθμός που αναγράφεται στο χαρτάκι που επιλέξαμε να είναι περιττός»
Χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, βρίσκουμε ότι:

$$P(\Pi) = \frac{\nu(\Pi)}{\nu(\Omega)}$$

$$= \frac{840}{1680} = \frac{1}{2}$$

B3. Ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $ΑΒ = ΑΓ = 13\ cm$ και $ΒΓ = 10\ cm$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία $(ε)$ η οποία διέρχεται από το $Β$ και είναι κάθετη στην πλευρά $ΒΓ$. Να υπολογίσετε:

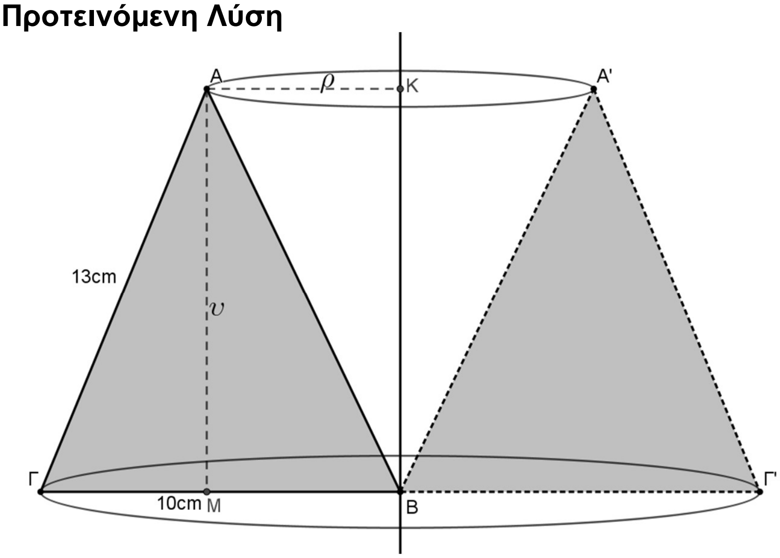


(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ($Εολ$) του στερεού που παράγεται **(μονάδες 10)**

(β) τον όγκο (V) του στερεού που παράγεται. **(μονάδες 5)**

(Να δώσετε την απάντησή συναρτήσει του $π$)

Προτεινόμενη Λύση



$$ΒΓ = 10cm$$
$$ΑΚ = ΒΜ = 5cm\ (Μ\ μέσο\ ΒΓ)$$
$$ΑΓ = ΑΒ = 13cm$$
$$Π.Θ.:\ (ΑΓ)^2 = (ΑΜ)^2 + (ΜΓ)^2 \Rightarrow$$
$$13^2 = (ΑΜ)^2 + 5^2 \Rightarrow (ΑΜ)^2 = 144 \Rightarrow$$
$$ΑΜ = 12cm$$

Η πλευρά AB περιστρέφεται και σχηματίζει κυρτή επιφάνεια κώνου με ακτίνα βάσης $\rho = AK = 5cm$ ύψος $\upsilon = AM = 12cm$ και γενέτειρα $\lambda = AB = 13cm$.

$$E\kappa\ \kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon = \pi\rho\lambda \Rightarrow$$
$$E\kappa\ \kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon = \pi \cdot 5 \cdot 13 \Rightarrow$$
$$E\kappa\ \kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon = 65\pi\ cm^2$$

Η πλευρά $A\Gamma$ περιστρέφεται και σχηματίζει κυρτή επιφάνεια κόλουρου κώνου με
ύψος $\upsilon = AM = 12cm$,
γενέτειρα $\lambda = A\Gamma = 13cm$,
ακτίνα μεγάλης βάσης $R = B\Gamma = 10cm$,
ακτίνα μικρής βάσης $\rho = AK = 5cm$.

$$E\kappa\ \kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon = \pi(R+\rho)\lambda \Rightarrow$$
$$E\kappa\ \kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon = \pi \cdot (10+5) \cdot 13 \Rightarrow$$
$$E\kappa\ \kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon = 195\pi\ cm^2$$

Η πλευρά $B\Gamma$ περιστρέφεται και σχηματίζει κύκλο ακτίνας $R = B\Gamma = 10cm$.

$$E\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon = \pi R^2 \Rightarrow$$
$$E\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow$$
$$E\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon = 100\pi\ cm^2$$

Εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ($Eo\lambda$) του στερεού που παράγεται

$$Eo\lambda = E\kappa\ \kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon + E\kappa\ \kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon + E\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon \Rightarrow$$
$$Eo\lambda = 65\pi + 195\pi + 100\pi \Rightarrow$$
$$Eo\lambda = 360\pi\ cm^2$$

Όγκος του στερεού που παράγεται

$$V\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon \Rightarrow$$
$$V\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon = \frac{1}{3}\pi 5^2 12 \Rightarrow$$
$$V\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon = 100\pi\ cm^3$$

$$V\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R\rho + \rho^2) \cdot \upsilon \Rightarrow$$
$$V\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon = \frac{1}{3}\pi(10^2 + 10 \cdot 5 + 5^2) \cdot 12 \Rightarrow$$
$$V\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon = 700\pi\ cm^3$$

$$V = V\kappa\acute{o}\lambda o\upsilon\rho o\upsilon - V\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon \Rightarrow$$
$$V = 700\pi - 100\pi \Rightarrow$$
$$V = 600\pi\ cm^3$$

ΤΕΛΟΣ