

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023 - 2024

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ/ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

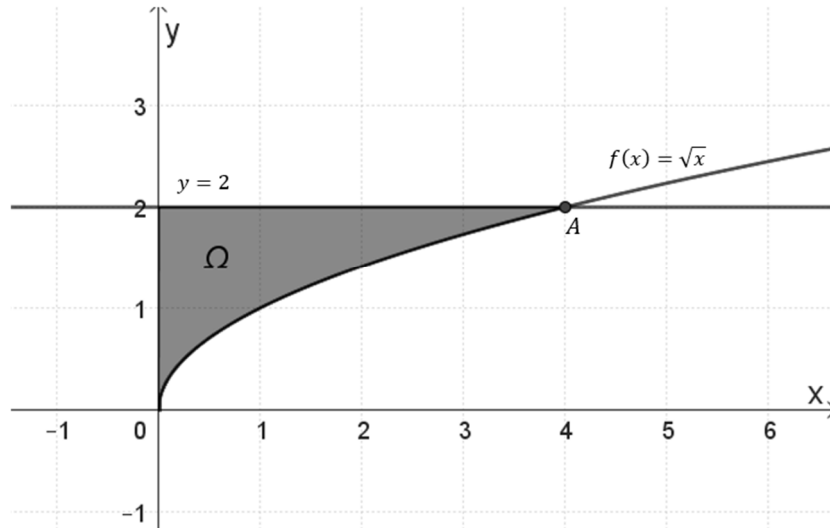
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΚΑΙ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΩΝ (3) ΣΕΛΙΔΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. Στο εξώφυλλο του εξεταστικού δοκιμίου να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
3. **Να απαντήσετε ΟΛΑ τα ερωτήματα.**
4. **Να απαντήσετε όλα τα θέματα** στο εξεταστικό δοκίμιο.
5. **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο απαντήσεων.
6. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας **το όνομά σας**.
7. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο για σχήματα, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις.
8. Η τελευταία λευκή σελίδα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρόχειρο ή ως συμπληρωματικός χώρος απαντήσεων.
9. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
10. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
11. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

A1 Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία $y = 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, στο σημείο A και σχηματίζει το σκιασμένο χωρίο Ω .
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου Ω .



A2 α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int 4x^3 dx$$

(Μονάδες 5)

β) Αν $\int f(x) dx = 2x - \ln x + c, x > 0$ τότε η συνάρτηση f είναι:

i) $f(x) = 2x - \ln x, x > 0$

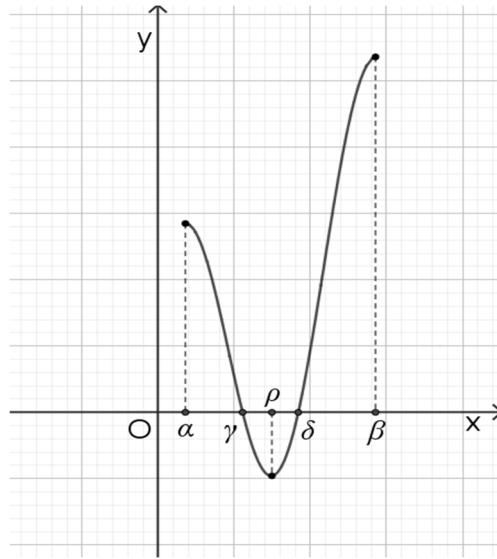
ii) $f(x) = 2 - \frac{1}{x}, x > 0$

iii) $f(x) = x^2 - \frac{\ln^2 x}{2}, x > 0$

iv) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}, x > 0$

(Μονάδες 5)

- A3** α) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$.



Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**.

- i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho, \beta]$.
- ii) Στο διάστημα $[a, \beta]$ ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- iii) Ισχύει $\int_a^{\gamma} f(x)dx > 0$.
- iv) Ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \rho)$.
- v) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

(Μονάδες 5)

- β) i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x \eta \mu x$ ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$.

(Μονάδες 3)

- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta \mu x + x \sigma \upsilon \nu x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

(Μονάδες 2)

A4 Δίνεται η λέξη «ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ».

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς δεν περιέχεται η λέξη «ΑΥΤΗ».

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε το πλήθος των λέξεων (με νόημα ή χωρίς νόημα) που μπορούν να σχηματιστούν, χρησιμοποιώντας 4 από τα γράμματα της λέξης «ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ», τα οποία να είναι 3 φωνήεντα και ένα σύμφωνο.

(Μονάδες 2)

A5 α) Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 7)

β) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε η f έχει σημείο καμπής στο x_0 ».

(Μονάδες 3)

A6 Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$xf'(x) + f(x) = e^x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = e + 1.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Αν $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^2 f(x) dx$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.

Οι ασκήσεις B1 και B2 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία ενώ η άσκηση B3 βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

B1 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = xe^{x+1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

(μονάδες 2)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(μονάδες 4)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(μονάδες 4)

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(μονάδες 1)

B2 Δίνεται έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha > \beta$$

εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ και εκκεντρότητα ίση με $\varepsilon = \frac{4}{5}$. Το T είναι τυχαίο

σημείο στην έλλειψη, διαφορετικό από τις κορυφές της $A'(-\alpha, 0)$ και $A(\alpha, 0)$

και η περίμετρος (Π) του τριγώνου $E'TE$ είναι ίση με $\Pi = 18$ μονάδες.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β και να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης.

(μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την έλλειψη

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

όταν αυτή περιστραφεί κατά π γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

(μονάδες 8)

B3 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:

$$f(x) - f(a + \beta - x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = a + \beta - x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{a + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \eta \mu x}{\sqrt{4 - \sigma \upsilon \nu^2 x}} dx$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ
ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2},$$
$$\text{όπου } \nu = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

$$r = \frac{\sum_{xy} - \nu \bar{x} \bar{y}}{\nu S_x S_y}, \quad \text{όπου } \sum_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{\nu} y_{\nu}$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta_{\mu x} = \eta_{\mu \alpha}$	$x = 360^\circ \kappa + \alpha$ ή $x = 360^\circ \kappa + 180^\circ - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma_{\nu x} = \sigma_{\nu \alpha}$	$x = 360^\circ \kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon_{\phi x} = \epsilon_{\phi \alpha}$	$x = 180^\circ \kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho) \lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$$

Εστίες $(\pm \gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm \frac{\alpha}{\epsilon}$,

Εκκεντρότητα $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \quad (\epsilon\phi x)' = \tau\epsilon\mu^2 x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\epsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\epsilon\mu x + \epsilon\phi x| + c \quad \int \sigma\tau\epsilon\mu x \, dx = \ln\left|\epsilon\phi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau\omicron\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \quad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau\omicron\xi\epsilon\phi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K.E.X}{100}$$