ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023 - 2024

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ/ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Γ037

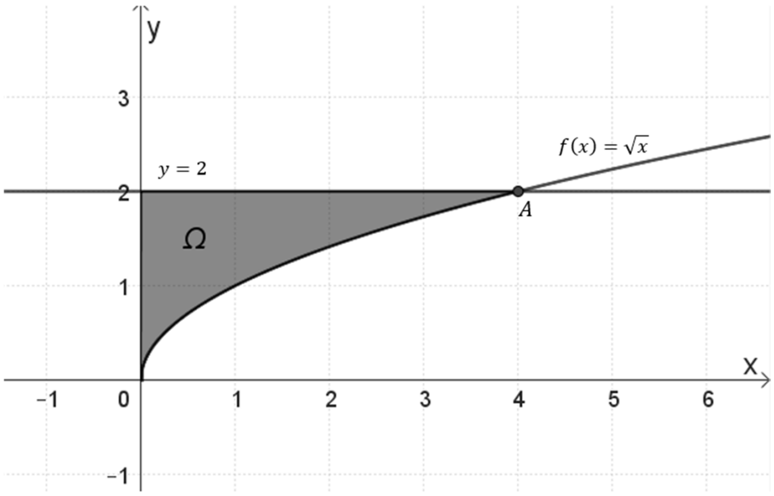
ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄:</u> Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1 Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία $y = 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, στο σημείο A και σχηματίζει το σκιασμένο χωρίο Ω.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου Ω.



<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

Υπολογισμός σημείου τομής καμπύλης και ευθείας:

$$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

Σημείο τομής: (4,2)

<u>α' τρόπος</u>

$$E(\Omega) = \int_0^4 \left(2 - \sqrt{x}\right)dx = \left[2x - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4 = 2 \cdot 4 - \frac{2\sqrt{4^3}}{3} = \frac{8}{3}\text{τ. μ.}$$

<u>β΄ τρόπος</u>

$$E(\Omega) = E_{Ορθογωνίου} - \int_0^4 \sqrt{x}dx = 2 \cdot 4 - \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4 = 8 - \frac{2\sqrt{4^3}}{3} = \frac{8}{3}\text{τ. μ.}$$

<u>γ' τρόπος</u>

Λύνουμε τον τύπο της συνάρτησης ως προς x: $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$

$$E(\Omega) = \int_0^2 y^2\, dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\ \tau.\mu$$

A2 α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int 4x^3 dx$$

(Μονάδες 5)

β) Αν $\int f(x)\, dx = 2x - \ln x + c,\ \ x > 0$ τότε η συνάρτηση f είναι:

i) $f(x) = 2x - \ln x,\ \ x > 0$

ii) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x},\ \ x > 0$

iii) $f(x) = x^2 - \dfrac{\ln^2 x}{2},\ \ x > 0$

iv) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x},\ \ x > 0$ **(Μονάδες 5)**

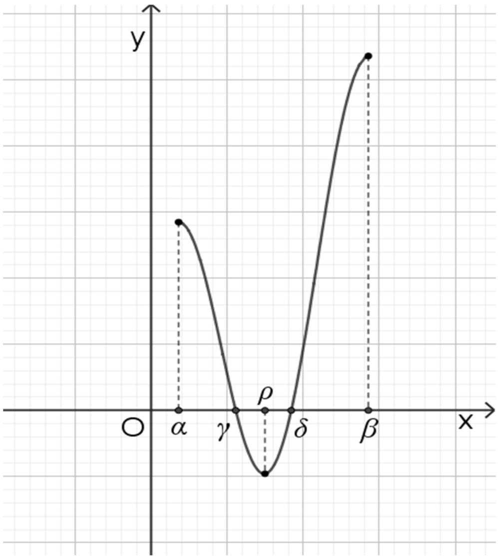
<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

α)

$$\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + c = x^4 + c$$

β) Ορθή απάντηση: ii) $f(x) = 2 - \frac{1}{x}\,,\ \ x > 0$

A3 α) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$.



Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**.

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho,\beta]$

ii) Στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

iii) Ισχύει $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx > 0$

iv) Ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\rho)$

v) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$

(Μονάδες 5)

β) i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x\text{ημ}x$ ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,\pi]$.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\text{ημ}x + x\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

(Μονάδες 2)

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

α) i) ΣΩΣΤΟ

ii) ΛΑΘΟΣ

iii) ΣΩΣΤΟ

iv) ΛΑΘΟΣ

v) ΣΩΣΤΟ

β) i) Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$
- $f(0) = f(\pi) = 0$

Επομένως οι συνθήκες του θεωρήματος Rolle ικανοποιούνται στο $[0, \pi]$.

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow \eta\mu\xi + \xi\sigma\upsilon\nu\xi = 0$

Άρα η εξίσωση $\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

Α4 Δίνεται η λέξη «ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ».

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς δεν περιέχεται η λέξη «ΑΥΤΗ».

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε το πλήθος των λέξεων (με νόημα ή χωρίς νόημα) που μπορούν να σχηματιστούν, χρησιμοποιώντας 4 από τα γράμματα της λέξης «ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ», τα οποία να είναι 3 φωνήεντα και ένα σύμφωνο.

(Μονάδες 2)

__**Προτεινόμενη λύση:**__

α) Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{4!\,2!} = 7560$$

β) Υπολογίζουμε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης που περιέχουν τη λέξη «ΑΥΤΗ»:

$$M_6^{\varepsilon} = \frac{6!}{3!} = 120$$

Το πλήθος των αναγραμματισμών που δεν περιέχουν τη λέξη είναι:

$$M_9^{\varepsilon} - M_6^{\varepsilon} = 7560 - 120 = 7440$$

γ) Η επιλογή γίνεται από τα 4 φωνήεντα: Α, Η, Ο, Υ και το σύμφωνο Τ.

1η Περίπτωση:

Το Α να εμφανίζεται μια φορά. Επιλέγουμε τριάδα από 4 φωνήεντα με $\binom{4}{3}$ τρόπους και μεταθέτουμε τα 4 γράμματα με 4! τρόπους.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:

$$\binom{4}{3} \cdot 4! = 4 \cdot 4! = 96$$

2η Περίπτωση:

Το Α να εμφανίζεται 2 φορές. Επιλέγουμε 1 από τα φωνήεντα Η,Ο,Υ με $\binom{3}{1}$ τρόπους και για τα 4 γράμματα έχουμε την επαναληπτική μετάθεση $M_4^{\varepsilon} = \frac{4!}{2!} = 12$. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:

$$\binom{3}{1} \cdot M_4^{\varepsilon} = 3 \cdot 12 = 36$$

Από την αρχή του αθροίσματος έχουμε συνολικά:

96+36=132 λέξεις

Α5 α) Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = (x-2)^3(x+1)^2$$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 7)

β) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

«Αν για την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε η f έχει σημείο καμπής στο x_0».

(Μονάδες 3)

__Προτεινόμενη λύση:__

α) Μελετούμε το πρόσημο της f'':

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3(x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x = -1 \text{ (διπλή ρίζα)}$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$					ΣΚ		

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$

Το σημείο $(2, f(2))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης αφού η f'' μηδενίζεται για $x = 2$ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x = 2$.

β) Η πρόταση είναι Λάθος.

Αν $f''(\xi) = 0$ τότε δεν υπάρχει απαραίτητα σημείο καμπής στο $x = \xi$.

Αυτό φαίνεται και από το προηγούμενο ερώτημα όπου η f δεν παρουσιάζει καμπή στο $x = -1$, παρόλο που η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται, αλλά το πρόσημο της f'' δεν αλλάζει εκατέρωθεν του $x = -1$.

Ή δίνεται αντιπαράδειγμα, π.χ. η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^4$, που ενώ η $f''(0) = 0$ η συνάρτηση δε παρουσιάζει καμπή αλλά ακρότατο.

Α6 Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$xf'(x) + f(x) = e^x$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e + 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Αν $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^2 f(x)dx$.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

α) $xf'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow \big(xf(x)\big)' = e^x$

$$\Leftrightarrow xf(x) = \int e^x dx$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = e^x + c$$

Αφού $f(1) = e + 1 \Leftrightarrow e + 1 = e + c \Leftrightarrow c = 1$

και $xf(x) = e^x + 1$

αφού $x > 0$ *τότε* $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}, \ x > 0$

β) Από κατά παράγοντες ολοκλήρωση έχουμε:

<u>α΄ τρόπος</u>

$$I = \int x^2 f(x)dx = \int x^2 \cdot \frac{e^x + 1}{x} dx =$$

$$= \int x(e^x + 1)dx = \int xe^x dx + \int xdx$$

$$= xe^x - \int e^x dx + \frac{x^2}{2}$$

$$= xe^x - e^x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= e^x(x - 1) + \frac{x^2}{2} + c$$

β’ τρόπος

$$I = \int x^2 f(x)dx = \int x \cdot (e^x + 1)dx$$

$$= x(e^x + x) - \int (e^x + x)dx =$$

$$= xe^x + x^2 - e^x - \frac{x^2}{2} + c$$

$$= e^x(x-1) + \frac{x^2}{2} + c$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Οι ασκήσεις Β1 και Β2 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία ενώ η άσκηση Β3 βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = xe^{x+1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

(μονάδες 2)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(μονάδες 4)**

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. **(μονάδες 4)**

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . **(μονάδες 1)**

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

α) Πεδίο ορισμού: $x \in \mathbb{R}$

Σημεία τομής με άξονες: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$$y = 0 \;\Rightarrow\; xe^{x+1} = 0 \;\Rightarrow x = 0 \;,\; e^{x+1} > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$$

Σημείο τομής με άξονες $(0{,}0)$

β) Υπολογισμός πρώτης παραγώγου:

$$f'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (x+1)e^{x+1}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \quad x = -1,\; e^{x+1} > 0 \;\;\forall\, x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$
- Η f έχει τοπικό (ολικό) ελάχιστο το $y_{min} = f(-1) = -1$, $TE(-1,-1)$

γ) Ασύμπτωτες:

Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Εξετάζουμε για οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{x+1}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-(x+1)}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-(x+1)} = +\infty\end{array}\right\} \text{τότε } \frac{-\infty}{+\infty}$$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L' Hospital. Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{(e^{-(x+1)})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-(x+1)}} = 0$$

Άρα

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ και συνεπώς η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\boldsymbol{y = 0}$ στο $-\infty$.

Επιπλέον

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{x+1}) = +\infty$$

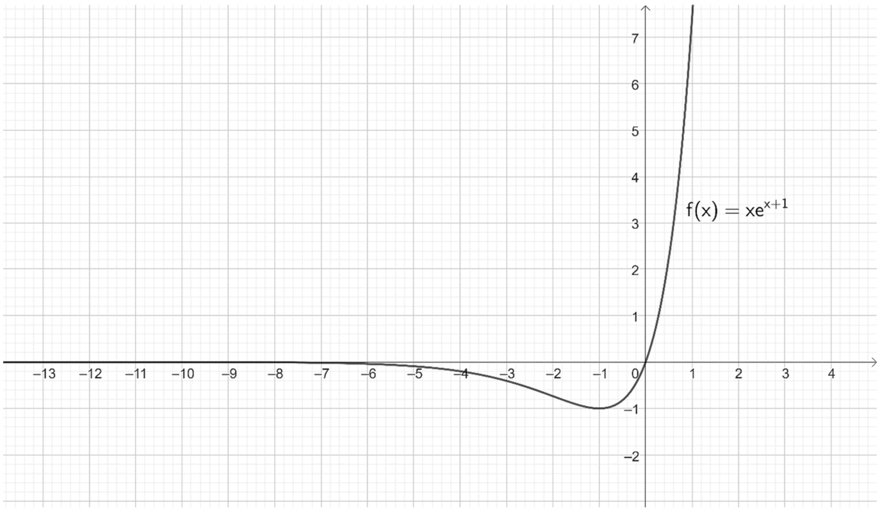
άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ελέγχουμε για πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty$$

άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

δ)



ε) Η f έχει ολικό ελάχιστο το $y_{min} = -1$, άρα το σύνολο τιμών της είναι $[-1, +\infty)$

Β2 Δίνεται έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha > \beta$$

εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ και εκκεντρότητα ίση με $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$. Το Τ είναι τυχαίο σημείο στην έλλειψη, διαφορετικό από τις κορυφές της $A'(-\alpha, 0)$ και $A(\alpha, 0)$ και η περίμετρος (Π) του τριγώνου $E'TE$ είναι ίση με $\Pi = 18$ μονάδες.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β και να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης.

(μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την έλλειψη

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

όταν αυτή περιστραφεί κατά π γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

(μονάδες 8)

Προτεινόμενη λύση:

α) Από την εκκεντρότητα έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5} \iff \gamma = \frac{4\alpha}{5}$$

Η περίμετρος του τριγώνου $E'TE$ δίνεται από την σχέση:

$\Pi = E'E + (TE + TE') = 2\gamma + 2\alpha$

$\Pi = 18 \Leftrightarrow 2\gamma + 2\alpha = 18$

$2 \cdot \frac{4}{5}\alpha + 2\alpha = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{5}\alpha = 9 \Leftrightarrow \quad \alpha = 5$

$\gamma = \dfrac{4\alpha}{5} = \dfrac{4 \cdot 5}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 4$

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2, \qquad \beta > 0$

$\beta^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Leftrightarrow \quad \beta = 3$

Παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = 5\sigma\upsilon\nu\theta, \qquad y = 3\eta\mu\theta, \qquad \theta \in [0,2\pi)$$

β) Λύνουμε την εξίσωση ως προς y:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{25} \Leftrightarrow y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

Υπολογισμός όγκου από περιστροφή χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων:

$$V = \pi \int_{-5}^{5} 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx$$

(Από συμμετρία του χωρίου)

$$= 2\pi \int_{0}^{5} 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx = 18\pi \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 25}\right]_0^5$$

$$= 18\pi\left(5 - \frac{125}{3 \cdot 25}\right) = 60\pi \ \kappa.\mu.$$

Β3 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) - f(\alpha+\beta-x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha,\beta].$$

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \alpha+\beta-x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^\pi \frac{x\,\eta\mu x}{\sqrt{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}}dx$$

<u>**Προτεινόμενη λύση**</u>:

α) Για $u = \alpha+\beta-x$ τότε $x = \alpha+\beta-u$ τότε $dx = -du$

και $x = \alpha \Rightarrow u = \beta$

$x = \beta \Rightarrow u = \alpha$

$$f(x) - f(\alpha+\beta-x) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha+\beta-x) = f(x)$$

$$I = \int_\alpha^\beta xf(x)dx = -\int_\beta^\alpha (\alpha+\beta-u)f(\alpha+\beta-u)du$$

$$= \int_\alpha^\beta (\alpha+\beta-x)f(\alpha+\beta-x)dx$$

$$= \int_\alpha^\beta (\alpha+\beta-x)f(x)dx$$

$$= \int_\alpha^\beta (\alpha+\beta)f(x)dx - \int_\alpha^\beta xf(x)dx$$

$$= (\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(x)dx - I$$

$$2I = (\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

$$I = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

β) Έστω $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{4 - \sigma\upsilon\nu^2 x}}$

$$f(\pi - x) = \frac{\eta\mu(\pi - x)}{\sqrt{4 - \sigma\upsilon\nu^2(\pi - x)}} = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{4 - (-\sigma\upsilon\nu x)^2}} = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{4 - \sigma\upsilon\nu^2 x}} = f(x)$$

Άρα ισχύει $f(x) - f(\pi - x) = 0$ και από το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\,\eta\mu x}{\sqrt{4 - \sigma\upsilon\nu^2 x}}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{4 - \sigma\upsilon\nu^2 x}}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} -\frac{2\,d\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\right)}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\right)^2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\pi}{2}\right) - \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 0}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β΄