ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023 - 2024

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ/ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΚ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α043

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

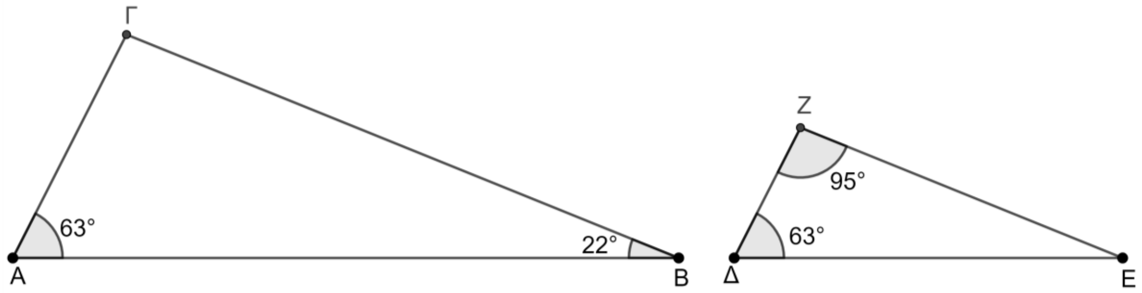
Προτεινόμενες ΛΥΣΕΙΣ

Γενικές Οδηγίες

Στις λύσεις υπάρχουν δύο (2) στήλες. Στην πρώτη στήλη αναγράφεται ο αριθμός της άσκησης. Στην δεύτερη στήλη περιγράφεται η λύση της άσκησης.

Μέρος Α΄: Αποτελείται από 6 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις.

Α1. Να αποδείξετε ότι τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια.



Λύση:

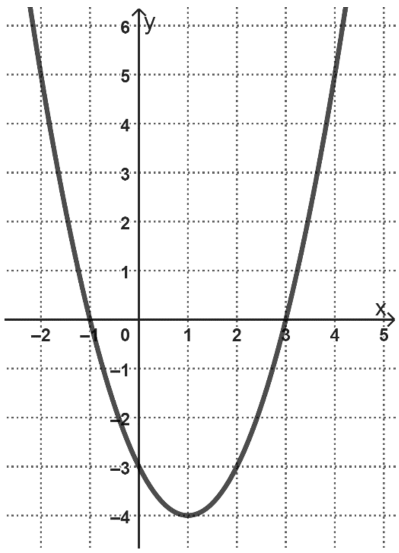
Α1.	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$ (Άθροισμα γωνιών τριγώνου) $\hat{\Gamma}=180°-63°-22° \Rightarrow \hat{\Gamma}=95°$ Επομένως ισχύει ότι: $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{\Delta}=63°\\ \hat{\Gamma}=\hat{Z}=95°\end{array}\right\}$ Αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία $\Rightarrow \Delta\Gamma AB \approx \Delta Z\Delta E$

Α2. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας με μέτρο $160°$.

Λύση:

Α2.	Η τελική πλευρά της γωνίας των $160°$ βρίσκεται στο $2^{ο}$ τεταρτημόριο. Επομένως: $\eta\mu 160° > 0$ $\sigma\upsilon\nu 160° < 0$ $\varepsilon\varphi 160° < 0$ $\sigma\varphi 160° < 0$

Α3. Στο διπλανό διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση:



$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \ \alpha \neq 0$$

Να βρείτε:

α) το πρόσημο του α,

β) τις λύσεις $x_1,\ x_2$ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Λύση:

Α3. α)	$\alpha > 0$ (η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστη τιμή)
β)	$x_1 = -1,\ \ x_2 = 3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της παραβολής με τον άξονα των τετμημένων)

Α4. α) Αν η τιμή 31 έχει βαρύτητα 0,1, η τιμή 43 έχει βαρύτητα 0,4 και η τιμή 52 έχει βαρύτητα 0,5, να υπολογίσετε την μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$εφx \cdot ημx \cdot συνx + σφx \cdot ημx \cdot συνx = 1$$

Λύση:

Α4. α)	Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι: $\bar{x} = \frac{31 \cdot 0{,}1 + 43 \cdot 0{,}4 + 52 \cdot 0{,}5}{0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}5} = \frac{3{,}1 + 17{,}2 + 26}{1} = 46{,}3$
β)	Α΄ μέλος= $εφx \cdot ημx \cdot συνx + σφx \cdot ημx \cdot συνx$ $= \frac{ημx}{συνx} \cdot ημx \cdot συνx + \frac{συνx}{ημx} \cdot ημx \cdot συνx$ $\frac{ημx}{\cancel{συνx}_1} \cdot ημx \cdot \cancel{συνx}^1 + \frac{συνx}{\cancel{ημx}_1} \cdot \cancel{ημx}^1 \cdot συνx$ $= ημ^2x + συν^2x$ Γνωρίζουμε ότι: $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ $= 1 =$ Β΄ μέλος

A5. α) i. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{23+\sqrt[4]{16}}}$$

ii. Να αποδείξετε τη σχέση:

$$\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta\geq 0$$

β) Η εξίσωση $2x^2-6x+1=0$ έχει λύσεις τις $x_1,\ x_2$. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(49^{x_1})^{x_2}+3^{x_1}\cdot 3^{x_2}$$

Λύση:

<table>
<tr><td>A5.
α) i)</td><td>$$\sqrt[3]{3+\sqrt{23+\sqrt[4]{16}}}=\sqrt[3]{3+\sqrt{23+2}}=\sqrt[3]{3+\sqrt{25}}=\sqrt[3]{3+5}=\sqrt[3]{8}=2$$</td></tr>
<tr><td>ii)</td><td>$\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2=$
<u>1^{ος} τρόπος</u>:
$=\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2-2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$<hr><u>2^{ος} τρόπος</u>:
$=\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2-2\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}+\left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2$

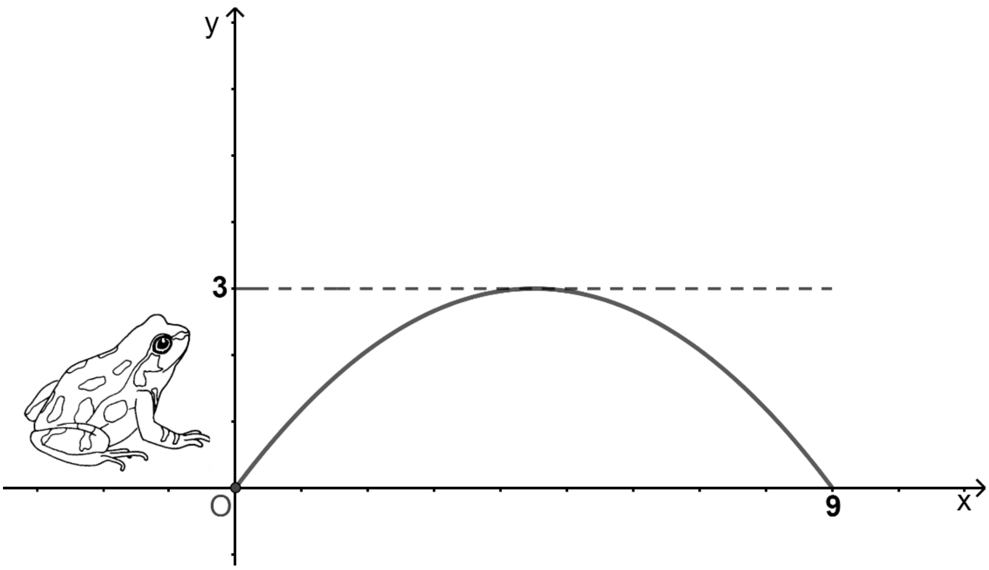
$=\alpha-2(\alpha\cdot\beta)^{\frac{1}{2}}+\beta$ ή $=\alpha-2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta$

$=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$</td></tr>
<tr><td>β)</td><td>$(49^{x_1})^{x_2}+3^{x_1}\cdot 3^{x_2}$
$=49^{x_1\cdot x_2}+3^{x_1+x_2}$

$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$. Επομένως, $x_1+x_2=-\frac{(-6)}{2}=3$
$x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}\cdot$ Επομένως, $x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$

Άρα, $(49^{x_1})^{x_2}+3^{x_1}\cdot 3^{x_2}$
$=49^{x_1\cdot x_2}+3^{x_1+x_2}=49^{\frac{1}{2}}+3^3=\sqrt{49}+27=7+27=34$</td></tr>
</table>

Α6. Ένα νεογέννητο βατραχάκι, ξεκινά από την αρχή των αξόνων και μπορεί να αναπηδήσει σε ύψος μέχρι 3 cm και να καλύψει οριζόντια απόσταση μέχρι 9 cm. Η τροχιά της κίνησής του έχει σχήμα παραβολής, όπως παρουσιάζεται στην πιο κάτω εικόνα:



α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου, στο οποίο το βατραχάκι θα επιτύχει το μέγιστο ύψος.

β) Η εξίσωση της παραβολής που περιγράφει την τροχιά της κίνησης του βατραχιού, δίνεται από τον τύπο:

$$y = \lambda x^2 + \frac{4}{3}x, \quad \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ.

Λύση:

Α6. α)	Εξίσωση του άξονα συμμετρίας: $x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+9}{2} = \frac{9}{2}$ Μέγιστη τιμή: $y = 3$ Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι η κορυφή της παραβολής: $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$
β)	Το σημείο $(9,0)$ επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής $y = \lambda x^2 + \frac{4}{3}x$ Άρα: $0 = \lambda \cdot 9^2 + \frac{4}{3} \cdot 9 \Rightarrow 0 = 81\lambda + 12 \Rightarrow -81\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = -\frac{12}{81} = -\frac{4}{27}$, δεκτή $(\lambda \neq 0)$ (Με τον ίδιο τρόπο το σημείο $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$ επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής)

Μέρος Β΄: Αποτελείται από 3 ασκήσεις. Βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με 10 μονάδες, ενώ οι ασκήσεις Β2 και Β3 βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.

Β1. α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 - 7x + 12 \leq 0$$ **(Μονάδες 4)**

β) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x^2 + y^2 = 27 \end{cases}$ **(Μονάδες 6)**

Λύση:

Β1.
α)

$$x^2 - 7x + 12 \leq 0$$

$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

$$\Rightarrow (x-3)(x-4) \leq 0$$

Έχουμε ότι $x_1 = 3,\ x_2 = 4$ είναι οι πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 7x + 12$

$\alpha = 1 > 0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, $x^2 - 7x + 12 \leq 0$, όταν $x \in [3,4]$

β)

$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x^2 + y^2 = 27 \end{cases}$

Μέθοδος της αντικατάστασης:

$2x^2 + (2x-3)^2 = 27$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 27 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 12x - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$

Αντικαθιστούμε τις $x_1 = 3,\ x_2 = -1$ στην εξίσωση $y = 2x - 3$

Για $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

Για $x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 2(-1) - 3 = -5$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι: $(3,3),\ (-1,-5)$

Β2. α) Αν $\eta\mu\theta = \frac{15}{17}$ και $90° < \theta < 180°$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{17\eta\mu\theta - 15\sigma\varphi\theta}{23\ \varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta}$$ **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(180° - x)}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu(90° - x)} = \frac{1}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$ **(Μονάδες 7)**

Λύση:

Β2.

α)

Αντικαθιστούμε στην Τριγωνομετρική Ταυτότητα, την τιμή $\eta\mu\theta = \frac{15}{17}$

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{15}{17}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{225}{289} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{225}{289} = \frac{64}{289}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\sqrt{\frac{64}{289}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\frac{8}{17}$$

$\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{8}{17}$ δεκτή $(\sigma\upsilon\nu\theta < 0,\ 90° < \theta < 180°)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{8}{17}$ απορρίπτεται

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{15}{17}}{-\frac{8}{17}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = -\frac{15}{8}$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{-\frac{15}{8}} \Rightarrow \sigma\varphi\theta = -\frac{8}{15}$$

Άρα, $$A = \frac{\cancel{17}^1 \cdot \frac{15}{\cancel{17}_1} - \cancel{15}^1 \cdot \left(-\frac{8}{\cancel{15}_1}\right)}{\cancel{23 \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{15}\right)}^{1}} = \frac{15+8}{23} = 1$$

β)

Α΄ μέλος= $\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(180° - x)}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu(90° - x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu(90° - x)}$

$$= \frac{\eta\mu x + (-\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}$$

$$= \frac{\cancel{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}^1}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\cancel{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}_1}$$

$= \frac{1}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} =$ Β΄ μέλος

B3. α) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

i) $\sqrt{2\kappa+1}=3$ **(Μονάδες 6)**

ii) $\lambda^{\frac{1}{3}}=2,\ \lambda>0$ **(Μονάδες 4)**

β) Αν $\kappa=4$ και $\lambda=8$, να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με λύσεις τις κ και λ.
(Μονάδες 5)

Λύση:

<table>
<tr><td>B3.
α) i.</td><td>Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt{2\kappa+1}=3$, πρέπει:
$2\kappa+1>0 \Rightarrow \kappa>-\frac{1}{2}$
Υψώνω και τα δύο μέλη στη δευτέρα δύναμη:
$\left(\sqrt{2\kappa+1}\right)^2=3^2 \Rightarrow 2\kappa+1=9 \Rightarrow 2\kappa=8$
$\Rightarrow \kappa=4$, δεκτή $(\kappa>-\frac{1}{2})$</td></tr>
<tr><td>α)ii)</td><td>$\lambda^{\frac{1}{3}}=2\,,\ \lambda>0$

<u>1^{ος} τρόπος</u>:
Υψώνω και τα δύο μέλη στην τρίτη δύναμη:
$(\lambda^{\frac{1}{3}})^3=2^3 \Rightarrow \lambda^{\frac{1}{3}\cdot 3}=8 \Rightarrow \lambda^{\cancel{\frac{1}{3}}\cdot\cancel{3}}=8$
$\Rightarrow \lambda=8$
<hr><u>2^{ος} τρόπος</u>:
Μετατροπή δύναμης με ρητό εκθέτη σε ρίζα: $\sqrt[3]{\lambda}=2,\ \lambda>0$
Υψώνω και τα δύο μέλη στην τρίτη δύναμη:
$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{\lambda}\right)^3=2^3 \Rightarrow \lambda=8$</td></tr>
<tr><td>β)</td><td>$S=\kappa+\lambda=4+8=12$

$P=\kappa\cdot\lambda=4\cdot 8=32$

<u>Εξίσωση 2^{ου} βαθμού</u>: $x^2-Sx+P=0$

Επομένως, $x^2-12x+32=0$</td></tr>
</table>

ΤΕΛΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΔΟΚΙΜΙΟΥ