ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023 - 2024

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΕΣΕΚ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Α037

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 90 λεπτά

Προτεινόμενες Λύσεις

Μέρος Α΄:

Α1. Να λύσετε την ανίσωση: $(x+2)(x-3) \leq 0$

Λύση:

Εύρεση ριζών του τριωνύμου $(x+2)(x-3)$:

$x+2=0, \quad x-3=0$

$x=-2, \quad x=3$

Κατασκευή πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Λύση ανίσωσης:

$(x+2)(x-3) \leq 0$ για κάθε $x \in [-2, 3]$

Α2. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων $(K, 6\ cm)$ και $(Λ, 9\ cm)$ με απόσταση $KΛ = 7\ cm$.

Λύση:

$\rho = 6\ cm, R = 9\ cm$

$|R - \rho| = 9 - 6 = 3\ cm$

$R + \rho = 9 + 6 = 15\ cm$

Διάκεντρος: $\delta = KΛ = 7\ cm$

Ισχύει ότι: $|R - \rho| < \delta < R + \rho$

Επομένως, οι κύκλοι τέμνονται

Α3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$ και σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα των τετμημένων.

Λύση:

$\lambda = εφ45° = 1$

α΄ τρόπος:

$y - y_A = \lambda(x - x_A)$

$\Leftrightarrow y - 4 = 1 \cdot (x-2)$

$\Leftrightarrow y - 4 = x - 2$

$\Leftrightarrow x - 2 - y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

β΄ τρόπος:

Εξίσωση ευθείας:

$y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = x + \beta$

Επαληθεύεται από το $(2,4)$:

$\Rightarrow 4 = 2 + \beta \Rightarrow \beta = 2$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y = x + 2$

Α4. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\dfrac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu x = \tau\varepsilon\mu x$

β) $\varepsilon\varphi x(\sigma\varphi x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$

<u>Λύση:</u>

α) $\dfrac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu x$

$= \dfrac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$= \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

$= \tau\varepsilon\mu\chi$

β) **α΄ τρόπος:**

$\varepsilon\varphi x(\sigma\varphi x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\chi)$

$= \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x - \varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$

$= 1 - \dfrac{\eta\mu x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}} \cdot \eta\mu x \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu x}$

$= 1 - \eta\mu^2 x$

$= \sigma\upsilon\nu^2 x$

β΄ τρόπος:

$\varepsilon\varphi x(\sigma\varphi x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)$

$= \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right)$

$= \dfrac{\cancel{\eta\mu x}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}} \cdot \dfrac{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{\cancel{\eta\mu x}} - \dfrac{\eta\mu x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}} \cdot \eta\mu x \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu x}$

$= 1 - \eta\mu^2 x$

$= \sigma\upsilon\nu^2 x$

A5. α) Να διατυπώσετε τον ορισμό των ίσων διανυσμάτων. **(1,5 μονάδα)**

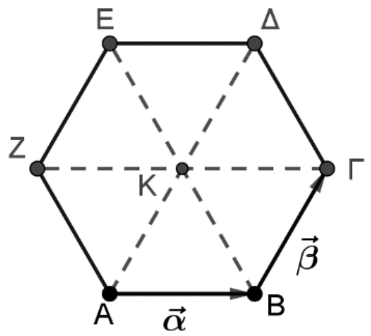
β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ (δηλ. έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνιές του ίσες), με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$.

(Σημείωση: Ισχύει ότι $Ε\Delta//Ζ\Gamma//ΑΒ,\ \ ΖΕ//Α\Delta//Β\Gamma,\ \ ΑΖ//ΒΕ//\Gamma\Delta$)

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **(4,5 μονάδες)**

ii. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{BE} = 4\vec{\beta} - 4\vec{\alpha}$ **(1 μονάδα)**

iii. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\mu} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{BE}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\overrightarrow{BK}$. **(3 μονάδες)**



Λύση:

α) Ίσα είναι τα διανύσματα τα οποία έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά.

β) i. $\overrightarrow{BA} = -\vec{\alpha}$

$\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} = -\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta E} = -\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\alpha} = -2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

ii. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{BE} = -\vec{\alpha} - \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

$= 4\vec{\beta} - 4\vec{\alpha}$

iii. $\vec{\mu} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{BE} = 4\vec{\beta} - 4\vec{\alpha} = 4(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma K} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

Άρα ισχύει: $\vec{\mu} = 4\overrightarrow{BK}$, οπότε $\vec{\mu}\ //\ \overrightarrow{BK}$

Α6. Δίνεται η παραβολή $f(x) = 3x^2 - 12x + 11,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της. **(1,5 μονάδες)**

β) Να εξετάσετε αν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και να την υπολογίσετε. **(2 μονάδες)**

γ) Χωρίς να βρείτε τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$, να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ακέραιους συντελεστές που να έχει λύσεις τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. **(6,5 μονάδες)**

<u>Λύση:</u>

α) Έχουμε $\alpha = 3,\ \beta = -12,\ \gamma = 11$

Εξίσωση άξονα συμμετρίας: $x = -\frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow x = -\frac{-12}{2\cdot 3} \Rightarrow x = 2$

β) $\alpha = 3 > 0 \Rightarrow$ έχει ελάχιστη τιμή

$y_{\varepsilon\lambda} = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1$

γ) $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-12}{3} = 4$

$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{11}{3}$

$S' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{4}{\frac{11}{3}} = \frac{12}{11}$

$P' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{P} = \frac{1}{\frac{11}{3}} = \frac{3}{11}$

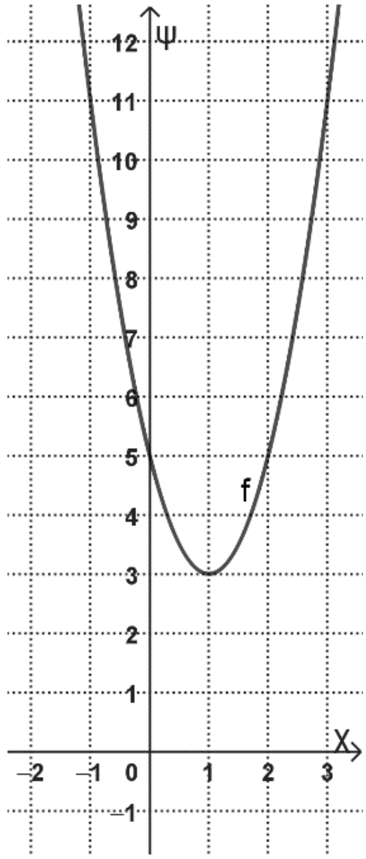
Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή:

$x^2 - S'x + P' = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{12}{11}x + \frac{3}{11} = 0$

$\Leftrightarrow 11x^2 - 12x + 3 = 0$

Μέρος Β΄:



Β1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής f με εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, α ≠ 0. Να βρείτε:

α) Το πρόσημο του a (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας), **(1,5 μονάδα)**

β) την τιμή του γ (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας), **(1,5 μονάδα)**

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της f, **(1 μονάδα)**

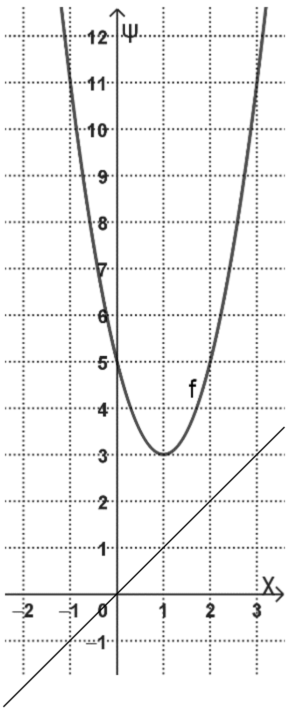
δ) το σύνολο τιμών της f, **(1 μονάδα)**

ε) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας), **(2 μονάδες)**

στ) τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 11$, **(1 μονάδα)**

ζ) τις λύσεις της ανίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq x$. **(2 μονάδες)**

Λύση:



α) α > 0 επειδή η παραβολή έχει ελάχιστη τιμή (ή επειδή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω)

β) γ = 5 είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της παραβολής με τον άξονα των τεταγμένων

γ) Κ(1, 3)

δ) Σύνολο Τιμών: [3, +∞)

ε) Δ < 0 επειδή η γραφική παράσταση της παραβολής δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα των τετμημένων

στ) x_1 = –1 και x_2 = 3

ζ) **α΄ τρόπος (γραφικά):**

Κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της ευθείας (ε): y = x, παρατηρούμε ότι η (ε) βρίσκεται κάτω από την παραβολή f για κάθε x ∈ ℝ. Επομένως η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq x$ είναι αδύνατη (δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις).

β΄ τρόπος (αλγεβρικά):

Η εξίσωση της παραβολής μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$, όπου $(-\kappa, \lambda)$ η κορυφή της παραβολής.

Αφού η κορυφή της f έχει συντεταγμένες $(1,3)$ τότε: $f(x) = a(x-1)^2 + 3$

$\Rightarrow f(x) = ax^2 - 2ax + a + 3$

$\gamma = 5 \Rightarrow \alpha + 3 = 5 \Rightarrow \alpha = 2$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι: $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

γ΄ τρόπος (αλγεβρικά):

Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο (1, 3) και $\gamma = 5$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha + \beta + 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \ \alpha - 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 2$$

$\Rightarrow \beta = -4$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι: $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

Λύση ανίσωσης:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 \leq x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 5 \leq 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 25 - 40 = -15 < 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη.

B2. Δίνεται η σχέση: $\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(\pi-\theta)\cdot\eta\mu(3\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=-\dfrac{1}{2},\quad \theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right).$

α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$. **(5 μονάδες)**

β) Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A=6\sigma\varphi\theta-2\eta\mu\theta$. **(7 μονάδες)**

γ) Να βρείτε τη γωνία θ. **(1 μονάδα)**

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας θ με τον τριγωνομετρικό κύκλο, αν αυτή τοποθετηθεί σε κανονική θέση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. **(2 μονάδες)**

<u>Λύση:</u>

α) $$\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(\pi-\theta)\cdot\eta\mu(3\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot\eta\mu\big(2\pi+(\pi-\theta)\big)}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(-\eta\mu\theta)}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot\eta\mu(\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(-\eta\mu\theta)}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\cancel{(-\eta\mu\theta)}\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot\eta\mu\theta}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\cancel{(-\eta\mu\theta)}}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\sigma\varphi\theta\cdot\eta\mu\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\cancel{\eta\mu\theta}}\cdot\cancel{\eta\mu\theta}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$$

β) $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$

$$\Rightarrow \eta\mu^2\theta+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow \eta\mu^2\theta+\frac{1}{4}=1$$

$$\Rightarrow \eta\mu^2\theta=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \eta\mu\theta=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Αφού $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, τότε $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα: $A = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$

γ) Αφού θ ∈ $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$, τότε $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

δ) Επειδή η γωνιά θ είναι σε κανονική θέση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, το σημείο τομής της τελικής πλευράς της με τον τριγωνομετρικό κύκλο έχει συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$, άρα είναι το $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

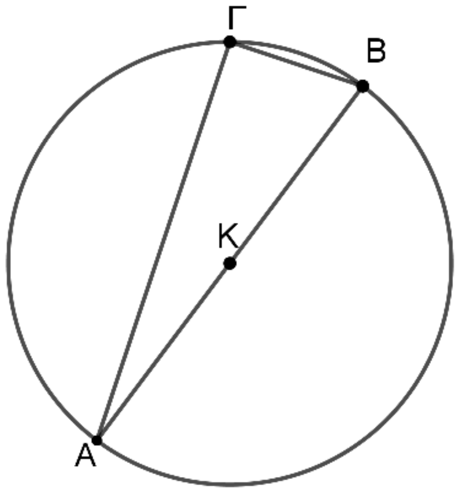
B3. Δίνεται κύκλος (K, ρ), και το εγγεγραμμένο σε αυτόν τρίγωνο $AB\Gamma$ με την πλευρά του AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Αν $A(4, -2), K(7, 2)$ και η χορδή $A\Gamma$ είναι παράλληλη με την ευθεία $3x - y + 5 = 0$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της διαμέτρου AB, **(2 μονάδες)**

β) την εξίσωση της χορδής $B\Gamma$, **(7 μονάδες)**

γ) τις συντεταγμένες του σημείου Γ. **(3 μονάδες)**

δ) Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο του A και παίρνουμε πάνω σε αυτή σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες. **(3 μονάδες)**



Λύση:

α) $\lambda_{AB} = \lambda_{AK} = \frac{y_K - y_A}{x_K - x_A} = \frac{2-(-2)}{7-4} = \frac{2+2}{7-4} = \frac{4}{3}$

$A(4, -2)$

Εξίσωση της ευθείας AB:

$y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A)$

$\Leftrightarrow y - (-2) = \frac{4}{3} \cdot (x - 4)$

$\Leftrightarrow y + 2 = \frac{4}{3} \cdot (x - 4)$

$\Leftrightarrow 3y + 6 = 4x - 16$

$\Leftrightarrow 4x - 3y - 22 = 0$

β) Κλίση της ευθείας (ε): $3x - y + 5 = 0$

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-1} = 3$$

$\lambda_{A\Gamma} = \lambda_\varepsilon = 3$ ($A\Gamma$ // ε, δεδομένο)

$A\hat{\Gamma}B = 90°$ ($A\hat{\Gamma}B$ εγγεγραμμένη γωνιά που βαίνει σε ημικύκλιο), άρα $A\Gamma \perp B\Gamma$ και ισχύει:

$$\lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$$

$$\Rightarrow\ 3 \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{3}$$

Για το B:
$A(4,-2)$, $K(7,2)$ με K το κέντρο του κύκλου, άρα K μέσο του AB. ‘Ετσι έχουμε:

$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$	$y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$
$7 = \frac{4 + x_B}{2}$	$2 = \frac{-2 + y_B}{2}$
$14 = 4 + x_B$	$4 = -2 + y_B$
$x_B = 10$	$y_B = 6$

$\Rightarrow B(10,6)$

Εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$:

$$y - y_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B)$$

$$\Leftrightarrow\ y - 6 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 10)$$

$$\Leftrightarrow\ 3y - 18 = -x + 10$$

$$\Leftrightarrow\ x + 3y - 28 = 0$$

γ) Θα βρω την εξίσωση της $A\Gamma$:
Βρήκαμε στο (α) ερώτημα ότι $\lambda_{A\Gamma} = 3$ και γνωρίζουμε ότι $A(4,-2)$. Άρα:

Εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$:

$$y - y_A = \lambda_{A\Gamma}(x - x_A)$$

$$\Leftrightarrow\ y - (-2) = 3 \cdot (x - 4)$$

$$\Leftrightarrow\ y + 2 = 3 \cdot (x - 4)$$

$$\Leftrightarrow\ y + 2 = 3x - 12$$

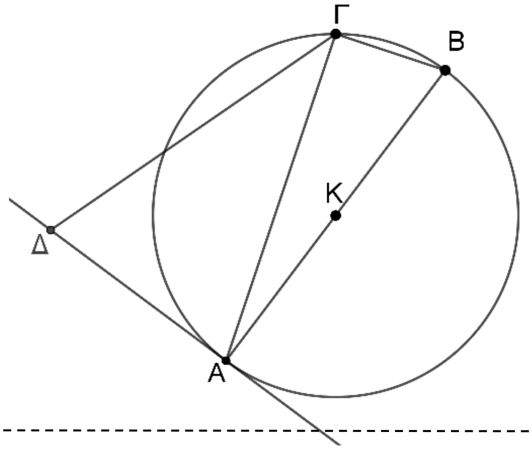
$$\Leftrightarrow\ 3x - y - 14 = 0$$

Για τις συντεταγμένες του σημείου Γ λύνω σύστημα:

$$\begin{array}{l|l} A\Gamma: 3x - y - 14 = 0 & 3 \\ B\Gamma: x + 3y - 28 = 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9x - 3y - 42 = 0 \\ \underline{x + 3y - 28 = 0\ +} \\ 10x - 70 = 0 \\ \Rightarrow x = \frac{70}{10} = 7 \end{array}$$

$$3 \cdot 7 - y - 14 = 0$$
$$\Rightarrow 21 - y - 14 = 0$$
$$\Rightarrow y = 7$$

Άρα: $\Gamma(7,7)$



δ) **α΄ τρόπος:**

$\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ (Θεώρημα χορδής εφαπτομένης)

$\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ (παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma\Delta$)

Επομένως, $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$

β΄ τρόπος:

$\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma \ = \ \varphi$ (παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma\Delta$)

$\Rightarrow B\hat{A}\Gamma = 90^o - \varphi$ ($AK \perp A\Delta$, η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής)

$\Rightarrow A\hat{B}\Gamma = \varphi$ ($A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{A}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές ως οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$)

Επομένως, $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$