

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΚΑΙ  
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

2023 - 2024

Γ' ΤΑΞΗΣ ΤΕΣΕΚ

ΣΕΙΡΑ Α'

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : Δευτέρα, 20 Μαΐου 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: Μηχανική και Κατασκευές

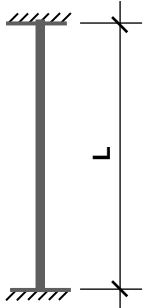
ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ : thdm301-1

**ΛΥΣΕΙΣ**

## ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από δέκα (10) ασκήσεις

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με τέσσερις (4) μονάδες. Σύνολο σαράντα (40) μονάδες

1. Το επιτρεπόμενο φορτίο  $F_{επ}$  που μπορεί να μεταφέρει το υποστύλωμα ύψους  $L = 4\text{m}$  το οποίο στηρίζεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1 είναι  $100\text{kN}$ . Ο συντελεστής ασφαλείας είναι  $\gamma = 3$ . Αν επιβάλουμε στο υποστύλωμα φορτίο  $F = 120\text{kN}$  τότε:



ΣΧΗΜΑ 1

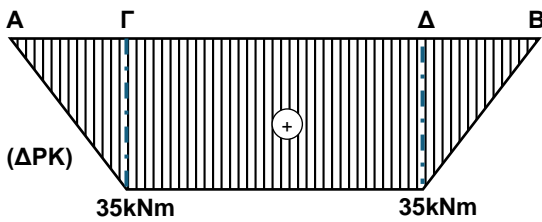
(α) Το υποστύλωμα θα λυγίσει αφού ξεπέρασε το  $F_{επ}$ .

(β) Το υποστύλωμα δεν είναι ασφαλές αλλά δεν θα λυγίσει.

(γ) Το υποστύλωμα είναι ασφαλές.

(δ) Το υποστύλωμα δε θα λυγίσει επειδή είναι αμφίπακτο.

2. Στο Σχήμα 2 δίνεται το διάγραμμα ροπών κάμψης  $M$  ( $\Delta\text{PK}$ ) για μια αμφιέριστη δοκό AB. Στη δοκό αυτή:



ΣΧΗΜΑ 2

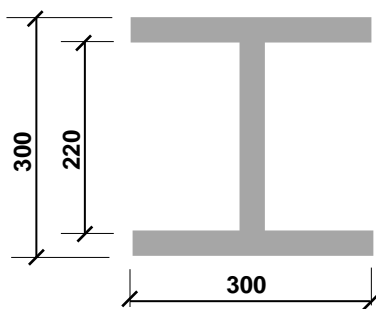
(α) Από το A μέχρι το Γ έχω ομοιόμορφο φορτίο

(β) Από το Γ μέχρι το Δ έχω ομοιόμορφο φορτίο

(γ) Στα σημεία Γ και Δ έχω συγκεντρωμένο φορτίο

(δ) Έχω παντού ομοιόμορφο φορτίο

3. Σε αμφιέριστη δοκό με διατομή όπως στο Σχήμα 3, η μέγιστη θετική ροπή κάμψης  $M_{\max}$ , είναι  $50\text{ kNm}$ . Η μεγαλύτερη θλιπτική τάση στην θέση αυτή εμφανίζεται:



ΣΧΗΜΑ 3

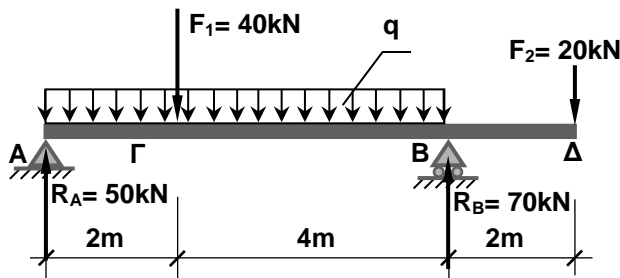
(α) Στην πάνω ίνα

(β) Στην κάτω ίνα

(γ) Στον άξονα του κέντρου Βάρους x-x

(δ) Είναι παντού ίδια

4. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως στο **Σχήμα 4** στο οποίο φαίνονται και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις. Να υπολογίσετε το μέγεθος του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q$  (kN/m) που καταπονεί την δοκό.



ΣΧΗΜΑ 4

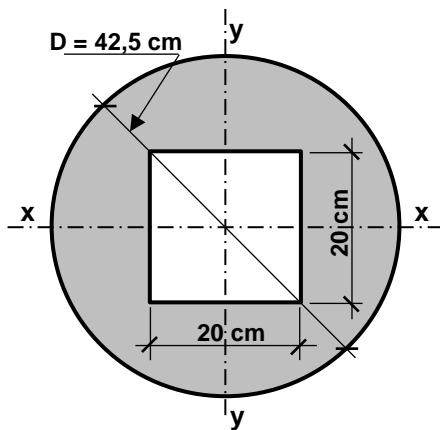
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$R_A + R_B - F_1 - F_2 - q \cdot (2+4) = 0 \Rightarrow$$

$$6q = 50 + 70 - 40 - 20 = 60 \Rightarrow$$

$$q = 10 \text{ kN/m}$$

5. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας  $I_x$ , ως προς τον κεντροβαρικό άξονα  $x - x$  της σύνθετης διατομής που φαίνεται στο **Σχήμα 5**.



ΣΧΗΜΑ 5

$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot 42,5^4}{64} - \frac{20 \cdot 20^3}{12}$$

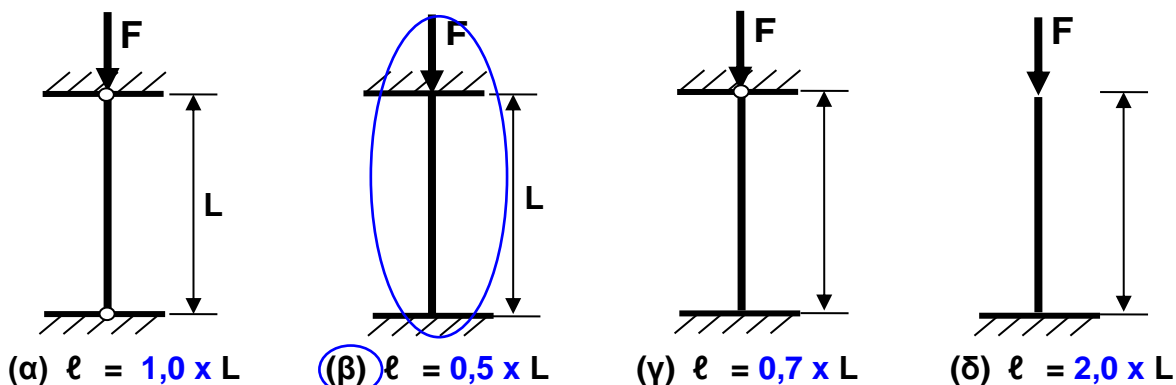
$$I_x = 160149,5 - 13333,33 = 146816,2 \text{ cm}^4$$

$$I_x = 146816,2 \text{ cm}^4 \text{ (για } \pi=3,14 \text{ } I_x=146735 \text{ cm}^4)$$

6. Στο **Σχήμα 6** δίνονται 4 περιπτώσεις στήριξης κολόνων που δέχονται το ίδιο αξονικό φορτίο  $F$ . Τόσο η διατομή όσο και το υλικό είναι τα ίδια για όλες τις περιπτώσεις.

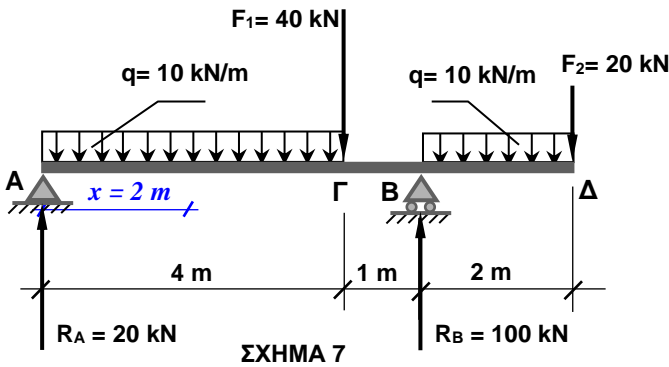
(α) Να γράψετε κάτω από κάθε περίπτωση, το ελεύθερο μήκος λυγισμού  $\ell$ , σε σχέση με το πραγματικό μήκος της ράβδου  $L$ .

(β) Να κυκλώσετε την κολόνα που είναι η πιο ασφαλής στο λυγισμό.



ΣΧΗΜΑ 6

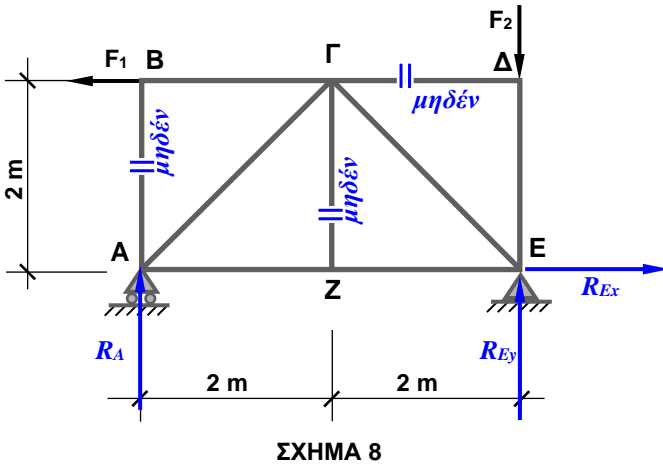
7. Να υπολογίσετε τη θέση  $X$  που παρουσιάζεται η μέγιστη θετική ροπής κάμψης, για τη δοκό που σας δίνεται στο **Σχήμα 7**.



*Θέση μέγιστης ροπής κάμψης*  
 $Q(x) = 0 \rightarrow R_A - q \cdot x = 0$   
 $20 - 10 \cdot x = 0 \rightarrow x = 20/10 \rightarrow x = 2 \text{ m}$

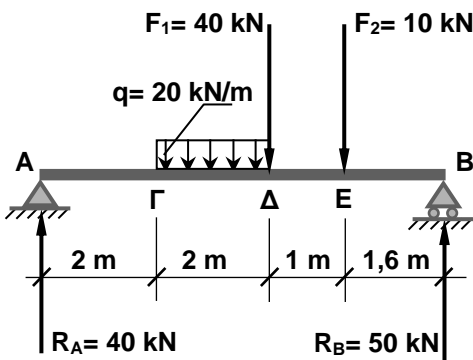
8. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 8**.

- (α) Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **E**.
- (β) Να κατονομάσετε τις **τρεις** ράβδους με μηδενική εσωτερική δύναμη.



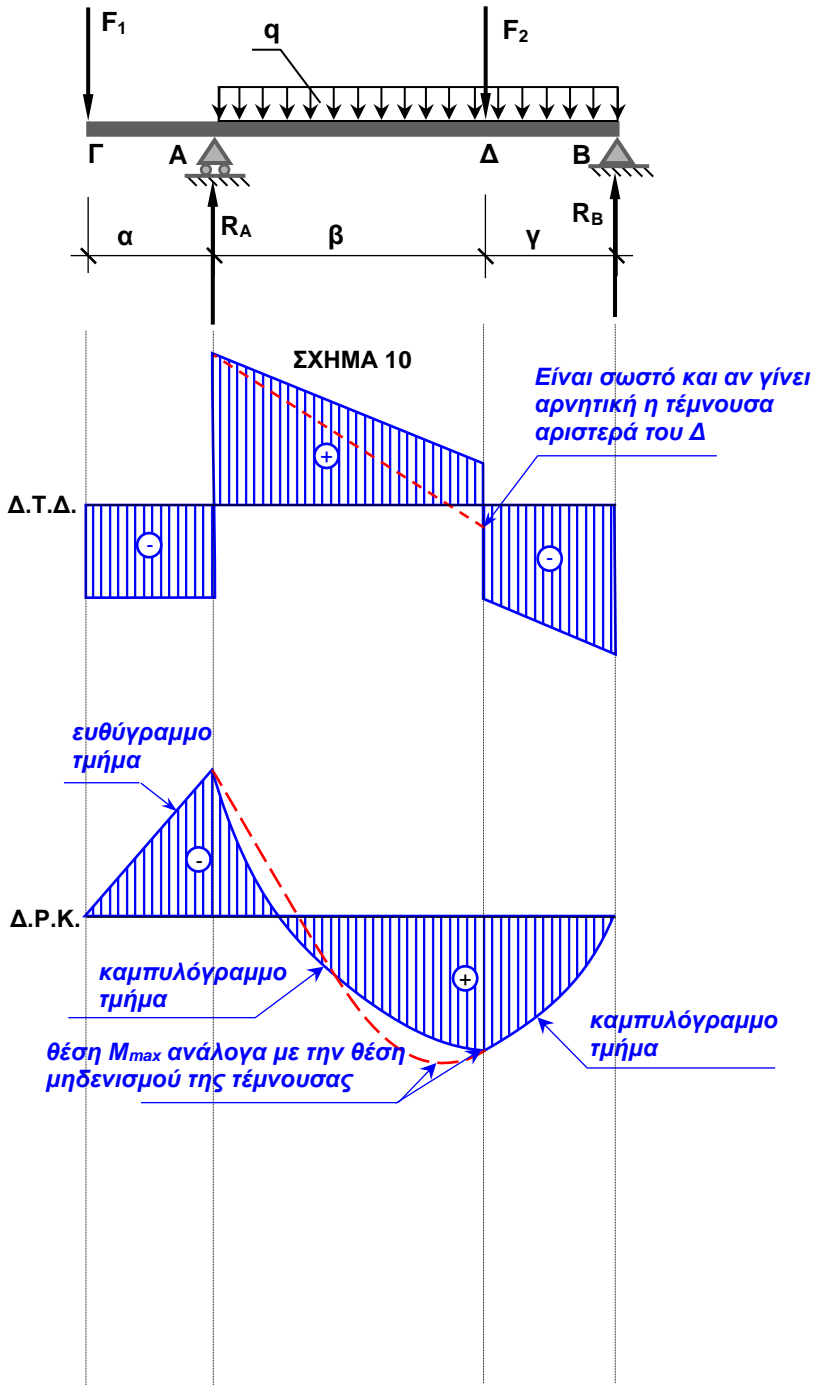
*Οι ράβδοι με μηδενική εσωτερική δύναμη είναι οι AB, ΓΔ και ΖΕ*

9. Για τη δοκό που σας δίνεται στο **Σχήμα 9**, να υπολογίσετε την τέμνουσα δύναμη αριστερά του σημείου **E** ( $Q_E^{ap.}$ ).



*Τέμνουσα δύναμη αριστερά του σημείου E*  
 $Q_E^{ap.} = R_A - q \cdot 2 - F_1 = 40 - 40 - 40 = \underline{-40 \text{ kN}}$   
 ή από δεξιά  
 $Q_E^{ap.} = -R_B + F_2 = -50 + 10 = \underline{-40 \text{ kN}}$

10. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 10**. Να σχεδιάσετε μια **πιθανή μορφή** τόσο των διαγραμμάτων των τεμνουσών δυνάμεων **Q (Δ.Τ.Δ.)** όσο και των ροπών κάμψης **M (Δ.Π.Κ.)** της δοκού.

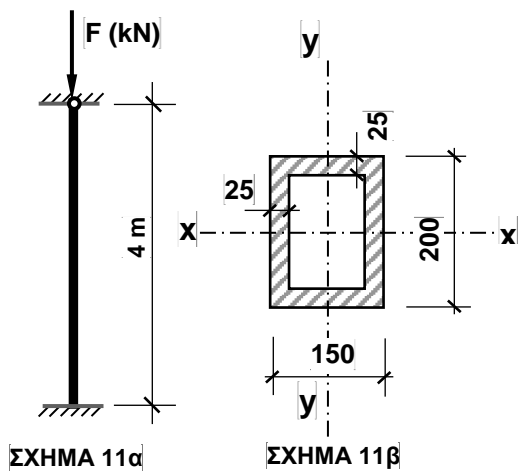


ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄  
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από τέσσερις (4) ασκήσεις.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες. Σύνολο σαράντα (40) μονάδες.

11. Να υπολογίσετε το επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού, που μπορεί να μεταφέρει χαλύβδινος στύλος, ο οποίος στηρίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 11α** και έχει ορθογωνική κοίλη διατομή όπως το **Σχήμα 11β**. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε **mm**. Δίνονται: μέτρο ελαστικότητας **E = 21000 kN/cm<sup>2</sup>** και συντελεστής ασφάλειας **γ = 2,5**.



$$F_{επ} = F_{κρ} / \gamma \text{ και } F_{κρ} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ}}{\ell^2}$$

$$\ell = 0,7 L \Rightarrow \ell = 0,7 \cdot 4m = 2800mm$$

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2 = 210 \text{ kN/mm}^2$$

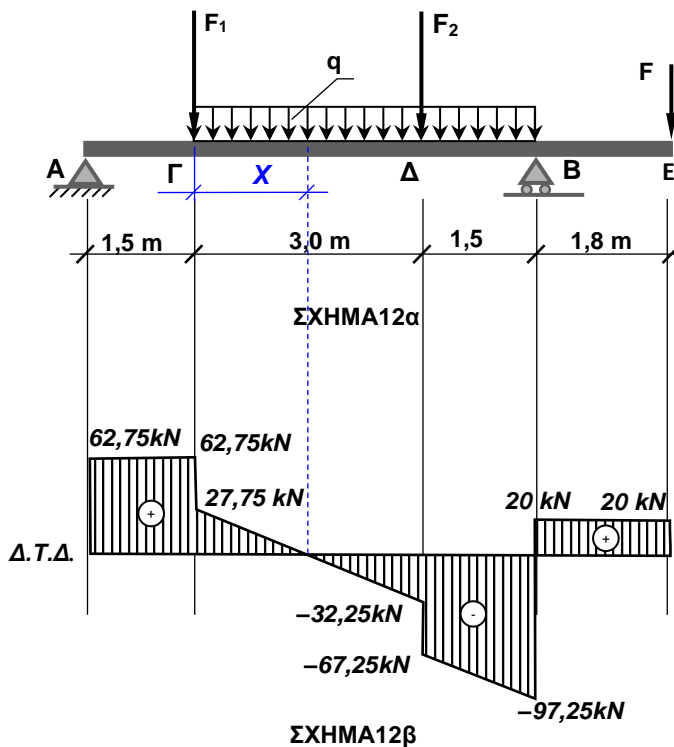
$$I_{ελ} = \frac{200 \cdot 150^3}{12} - \frac{150 \cdot 100^3}{12}$$
$$= 56250000 - 12500000 \approx 43750000 \text{ mm}^4$$

$$F_{κρ} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 43750000}{2800^2} \approx 11565 \text{ kN}$$

$$F_{επ} = 11565 / 2,5 = 4620 \text{ kN}$$

12. Δίνεται προέχουσα δοκός όπως στο **Σχήμα 12α**. Στο **Σχήμα 12β** δίνεται το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων της δοκού (**ΔΤΔ**) το οποίο αφού μελετήσετε:

- Να υπολογίσετε τη τιμή του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q$
- Να υπολογίσετε την απόσταση  $X$  από το  $\Gamma$  της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης  $M_{max}$ .
- Να βρείτε τις τιμές που σας χρειάζονται (αντιδράσεις ή συγκεντρωμένα φορτία ή εμβαδά) για να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης ροπής κάμψης  $M_{max}$ .



α) Υπολογισμός ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q$  (μεταξύ ΓΔ)

$$\epsilon\varphi \varphi = q = \frac{27,75 + 32,25}{3} = 20 \text{ kN/m}$$

ή

$$\epsilon\varphi \varphi = q = \frac{97,25 - 67,25}{1,5} = 20 \text{ kN/m}$$

β) Υπολογισμός θέσης  $X$  μέγιστης ροπής στο άνοιγμα

$$Q_x = 0 \Rightarrow X = \frac{27,75}{20} = 1,3875 \text{ m}$$

ή

$$R_A = 62,75 \text{ kN}, F_1 = 62,75 - 27,75 = 35 \text{ kN} \Rightarrow R_A - F_1 - q \cdot X = 0 \Rightarrow 20 \cdot X = 62,75 - 35 \Rightarrow X = 27,75 / 20 = 1,3875 \text{ m}$$

γ) Υπολογισμός μέγιστης ροπής στο άνοιγμα  $M_{max}$

Με εμβαδό

$$M_{max} = 62,75 \cdot 1,5 + \frac{27,75 \cdot 1,3875}{2} = 113,4 \text{ kNm}$$

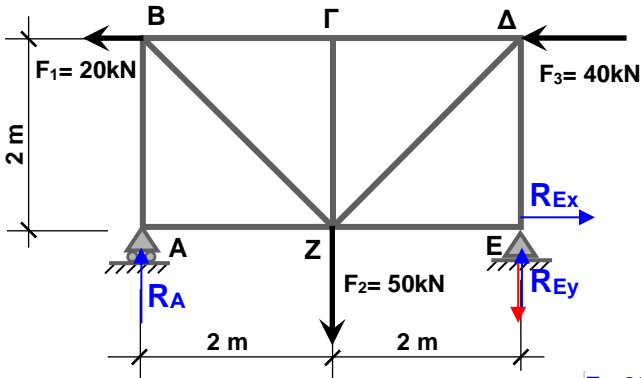
ή

$$M_{max} = R_A \cdot (1,5 + X) - F_1 \cdot X - q \cdot X^2 / 2 = 62,75 \cdot (1,5 + 1,3875) - 35 \cdot 1,3875 - 20 \cdot (1,3875)^2 / 2 = 113,4 \text{ kNm}$$

13. Δίνεται δικτύωμα με διαστάσεις και φορτία όπως φαίνεται στο **Σχήμα 13**.

- Να σχεδιάσετε **όλες** τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **E**.
- Να κατονομάσετε τις δύο ράβδους με μηδενική εσωτερική δύναμη.
- Να υπολογίσετε **μόνο** την οριζόντια αντίδραση. Δίνονται οι κατακόρυφες αντιδράσεις  $R_{AY} = 55\text{kN}$  και  $R_{EY} = -5\text{kN}$ .
- Να υπολογίσετε το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης που αναπτύσσεται στις ράβδους **AB**, **BZ** και **BΓ** του δικτυώματος και να καθορίσετε το είδος της καταπόνησης τους, εφαρμόζοντας τη μέθοδο των κόμβων.

**Σημείωση:** Ξεκινήστε με τον κόμβο **A** και μετά στον **B**.



ΣΧΗΜΑ 13

β) Ράβδοι με μηδενική καταπόνηση:  
Ράβδος AZ και ΓZ

γ) Αντιδράσεις

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ex} = 20 + 40 = 60\text{kN}$$

Κόμβος A

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} = -R_A = -55\text{kN}$$

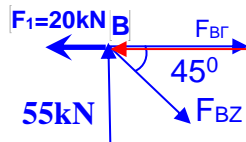
Ολιβόμενη

Κόμβος B

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} - F_{BZ} \cdot \eta\mu 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$F_{BZ} = F_{AB} / \eta\mu 45^\circ = 55 / 0,7 \Rightarrow$$

$$F_{BZ} = 77,8\text{ kN Εφελκόμενη}$$



Κόμβος B

Υπολογισμός της F\_BΓ

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BΓ} - 20 + F_{BZ} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

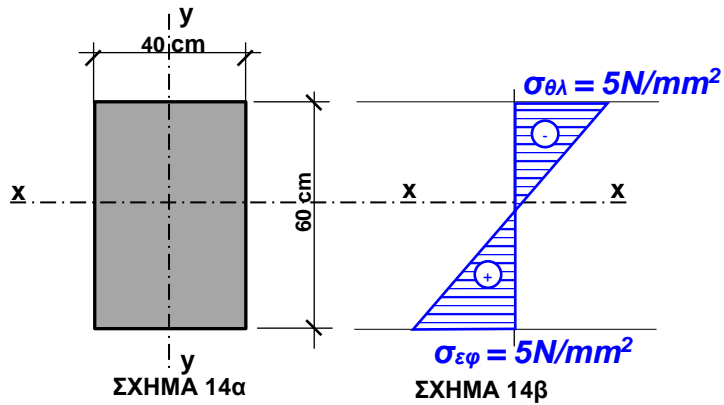
$$F_{BΓ} = 20 - 77,8 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ \Rightarrow F_{BΓ} = -35\text{kN}$$

Ολιβόμενη



14. Σε αμφιέρειστη δοκό με διατομή όπως δίνεται στο Σχήμα 14α, εμφανίζεται μέγιστη θετική ροπή κάμψης  $M_{max} = 120 \text{ kNm}$ .

Να υπολογίσετε σε  $\text{N/mm}^2$  την μέγιστη θετική και αρνητική τάση που έχω στην διατομή, και να σχεδιάσετε στο Σχήμα 14β το διάγραμμα κατανομής των τάσεων της διατομής.



$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 720000 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} \cdot y_{max} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{120 \cdot 100 \cdot \text{kNcm}}{720000 \text{ cm}^4} \cdot 30 \text{ cm} = 0,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 0,5 \cdot \frac{10^3 \text{ N}}{10^2 \text{ mm}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{max} = 5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β΄  
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Γ΄

## ΜΕΡΟΣ Γ΄: Αποτελείται από μία (1) άσκηση

Η άσκηση βαθμολογείται με 20 μονάδες.

15. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 15**.

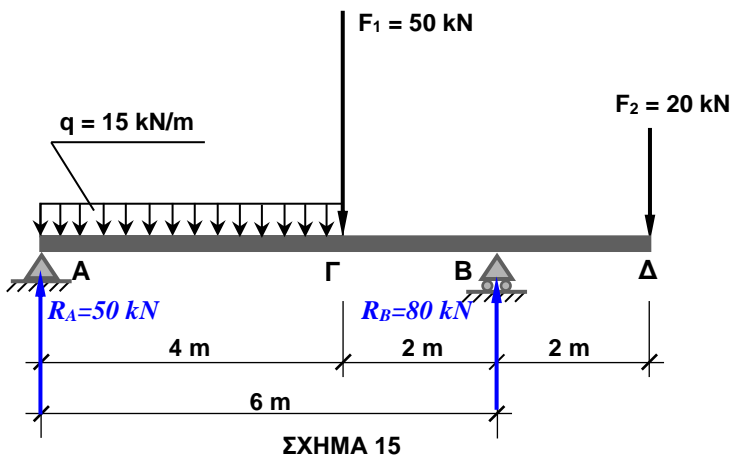
(α) Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.

(β) Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ**.

(γ) Να υπολογίσετε τη θέση στην οποία αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης  $M_{max}$  (σημείο μηδενικής τιμής τέμνουσας δύναμης).

(δ) Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης  $M_{max}$ .

(ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων  $Q$  και των ροπών κάμψης  $M$  και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A**, **B**, **Γ** και **Δ** καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης  $M_{max}$ . Στο διάγραμμα ροπών κάμψης να δείξετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματά του.



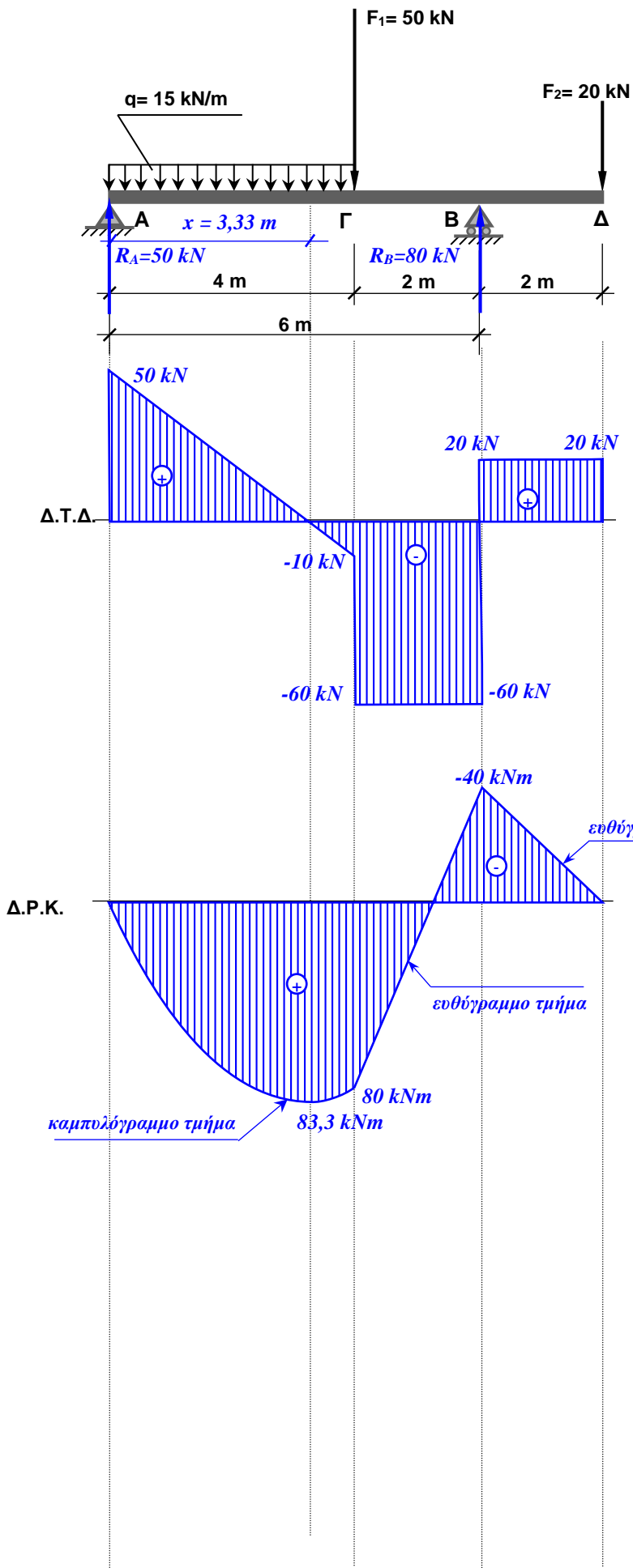
$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B - 15 \cdot 4 - 50 - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B = 130 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad (15 \cdot 4) \cdot 2 + 50 \cdot 4 - R_B \cdot 6 + 20 \cdot 8 = 0 \rightarrow$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_A \cdot 6 - (15 \cdot 4) \cdot 4 - 50 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$R_B = 80 \text{ kN}$$

$$R_A = 50 \text{ kN} \text{ Έλεγχος:} \quad R_A + R_B = 50 + 80 = 130 \text{ kN}$$



### ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$Q_A = R_A = 50 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\alpha\rho.} = 50 - 15 \cdot 4 = -10 \text{ kN}$$

$$Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi.} = -10 - 50 = -60 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\alpha\rho.} = -60 = -60 \text{ kN}$$

$$Q_B^{\delta\epsilon\xi.} = -60 + 80 = 20 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta}^{\alpha\rho.} = 20 = 20 \text{ kN}$$

$$Q_{\Delta} = 20 - 20 = 0$$

### ΣΗΜΕΙΟ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ ΔΥΝΑΜΗΣ

$$Q_x = 0$$

$$50 - 15 \cdot x = 0$$

$$x = 3,33 \text{ m}$$

### ΡΟΠΕΣ ΚΑΜΨΗΣ

$$M_{max} = 50 \cdot 3,33 - (15 \cdot 3,333) \cdot 1,667 \rightarrow$$

$$M_{max} = 83,3 \text{ kNm}$$

$$M_A = 0$$

$$M_{\Gamma} = 50 \cdot 4 - (15 \cdot 4) \cdot 2 = 200 - 120 =$$

$$80 \text{ kNm}$$

$$M_B = 50 \cdot 6 - (15 \cdot 4) \cdot (2 + 2) - 50 \cdot 2 =$$

$$= 300 - 240 - 100 = -40 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta} = 0$$



**ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

<i>Συνθήκες ισορροπίας</i>	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M = 0$
<i>Ροπές αδράνειας</i>	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$ $I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$
<i>Απλή κάμψη</i>	$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$
<i>Λυγισμός</i>	$F_{κρ.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{ελ.}}{\ell^2}$ $F_{επ.} = \frac{F_{κρ.}}{\gamma}$

**ΠΡΟΧΕΙΡΟ**