ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 28 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>:

Α1 Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 12)\,dx$$

Λύση:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 12)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 2x^2 - 12x + c$$

Α2 Δίνονται οι ηλικίες οκτώ (8) υπαλλήλων μιας εταιρείας:

$$36, 37, 32, 30, 34, 30, 37, 40$$

Να υπολογίσετε:

α) τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 (3 Μονάδες)

β) το εύρος (R) των πιο πάνω ηλικιών και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR). (2 Μονάδες)

Λύση:

α)

$30,30,32,34, \quad 36,37,37,40$ $\qquad Q_2 = \frac{34+36}{2} = 35$

$30,30, \quad 32,34$ $\qquad Q_1 = \frac{30+32}{2} = 31$

$36,37, \quad 37,40$ $\qquad Q_3 = \frac{37+37}{2} = 37$

β) $R = x_{max} - x_{min} = 40 - 30 = 10$

$IQR = Q_3 - Q_1 = 37 - 31 = 6$

Α3 Δίνεται η λέξη: **Μ Α Ρ Γ Α Ρ Ι Τ Α**

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (2 Μονάδες)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς περιέχουν τη λέξη «ΡΙΤΑ». (3 Μονάδες)

Λύση:

α) 9 γράμματα από τα οποία επαναλαμβάνεται το Α 3 φορές και το Ρ 2 φορές

$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = 30240$

β) Η λέξη «ΡΙΤΑ» λειτουργεί ως ένα γράμμα, άρα έχουμε 6 γράμματα από τα οποία το Α επαναλαμβάνεται 2 φορές

$$M_6^{\varepsilon} = \frac{6!}{2!} = 360$$

Α4 Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία $f''(x) = 4x - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες $f'(-1) = 0$ και $f(-1) = 1$.

Λύση:

$f'(x) = \int f''(x)dx \Rightarrow f'(x) = \int (4x-1)dx$

$\Rightarrow f'(x) = 2x^2 - x + c_1$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 2(-1)^2 - (-1) + c_1 = 0$

$\Rightarrow c_1 = -3$

$f'(x) = 2x^2 - x - 3$

$f(x) = \int f'(x)dx \Rightarrow f(x) = \int (2x^2 - x - 3)dx$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c_2$

$f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) + c_2 \Rightarrow$

$c_2 = -\frac{5}{6}$

$f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{5}{6}$

A5 Δίνεται ημισφαίριο όγκου $144\,\pi\ cm^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ημισφαιρίου.

Λύση:

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}\Rightarrow 144\pi=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}\Rightarrow R^3=216\Rightarrow R=6cm$$

$$E_{ολ}=\frac{1}{2}E_{σφ}+E_{κύκλου}=\frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2+\pi R^2=2\pi 6^2+\pi 6^2=108\pi\ cm^2$$

A6 Η συνάρτηση $f(x)=\kappa x^3+3x^2+2\lambda,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ \kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=-2$, την τιμή $f(-2)=0$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ. (3 Μονάδες)

β) Να χαρακτηρίσετε το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει η συνάρτηση f στο $x=-2$. (2 Μονάδες)

Λύση:

α)

$$f(-2)=0\Rightarrow \kappa(-2)^3+3(-2)^2+2\lambda=0\Rightarrow -8\kappa+2\lambda=-12$$

$$f'(x)=3\kappa x^2+6x$$

Ακρότατο στο $x=-2\ \Rightarrow f'(-2)=0\Rightarrow 3\kappa(-2)^2+6(-2)=0\Rightarrow \kappa=1$

$$-8\kappa+2\lambda=-12\Rightarrow -8+2\lambda=-12\Rightarrow \lambda=-2$$

β)

$$f(x)=x^3+3x^2-4$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+6x=0\Rightarrow 3x(x+2)=0\Rightarrow x=0\,,x=-2$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε	↗	

Στο $x=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

A7 Από 4 Μαθηματικούς, 2 Φυσικούς και 3 Χημικούς ενός Λυκείου θα επιλεγεί μια πενταμελής ομάδα για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε ένα επιστημονικό συνέδριο Χημείας. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν στην ομάδα:

α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, (1 Μονάδα)

β) θα υπάρχουν ακριβώς δύο Χημικοί, (2 Μονάδες)

γ) θα υπάρχει τουλάχιστον ένας Φυσικός και τουλάχιστον ένας Χημικός. (2 Μονάδες)

Λύση:

α) $\binom{9}{5}=\frac{9!}{5!\cdot(9-5)!}=126$ τρόποι

β) $\binom{3}{2}\binom{6}{3}=\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=3\cdot 20=60$ τρόποι γ) <u>Α΄ τρόπος</u>

Περίπτωση 1 : Κανένας Φυσικός $\binom{7}{5} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ τρόποι

Περίπτωση 2 : Κανένας Χημικός $\binom{6}{5} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 6$ τρόποι

Όλοι οι δυνατοί τρόποι εκτός των περιπτώσεων 1 και 2

$$126 - (21 + 6) = 99$$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Περίπτωση 1 : 1 Φυσικός , 1 Χημικός και 3 Μαθηματικοί

$$\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{3} = 24$$

Περίπτωση 2 : 1 Φυσικός , 2 Χημικοί και 2 Μαθηματικοί

$$\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{2} = 36$$

Περίπτωση 3 : 1 Φυσικός , 3 Χημικοί και 1 Μαθηματικός

$$\binom{2}{1}\binom{3}{3}\binom{4}{1} = 8$$

Περίπτωση 4 : 2 Φυσικοί , 1 Χημικός και 2 Μαθηματικοί

$$\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{2} = 18$$

Περίπτωση 5 : 2 Φυσικοί , 2 Χημικοί και 1 Μαθηματικός

$$\binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{1} = 12$$

Περίπτωση 6 : 2 Φυσικοί , 3 Χημικοί

$$\binom{2}{2}\binom{3}{3} = 1$$

Σύνολο $24 + 36 + 8 + 18 + 12 + 1 = 99$ τρόποι

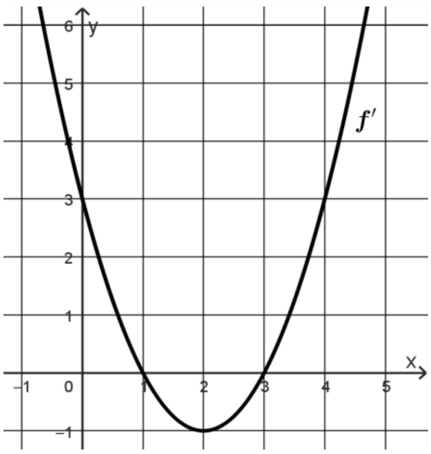
A8 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f.

α) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (2 Μονάδες)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα. (2 Μονάδες)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει σημείο καμπής. (1 Μονάδα)



Λύση

α) Από την γραφική παράσταση κατασκευάζουμε τον πίνακα

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	Τ.Μ	↘	Τ.Ε	↗	

Γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$

Γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$

β) Στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

Στο $x = 3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

γ) Στο $x = 2$ παρουσιάζει σημείο καμπής

(τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο της f')

A9 Δίνονται δυο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(B) = \frac{7}{10}, \quad P(A|B) = \frac{3}{7}, \quad P(A - B) = \frac{1}{5}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: «να μην πραγματοποιηθεί το B» (1 Μονάδα)

Δ: «να πραγματοποιηθεί και το A και το B» (1,5 Μονάδες)

Ε: «να μην πραγματοποιηθεί το A δεδομένου ότι
δεν πραγματοποιήθηκε το B» (2,5 Μονάδες)

Λύση:

$P(B) = \frac{7}{10}$, $P(A|B) = \frac{3}{7}$, $P(A - B) = \frac{1}{5}$

$$P(\Gamma) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{10} \Rightarrow P(\Gamma) = \frac{3}{10}$$

$$P(\Delta) = P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$P(E) = P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')} = \frac{1 - \frac{9}{10}}{\frac{3}{10}} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{3}$$

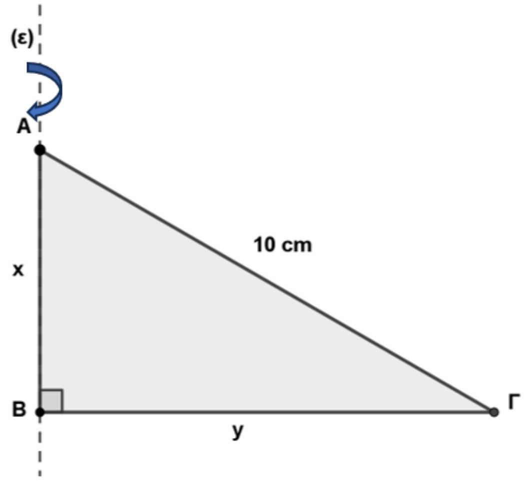
Α10 Στο πιο κάτω σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{B} = 90°$), περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Τα σημεία A και B ανήκουν στην ευθεία (ε). Αν $AB = x$, $BΓ = y$ και $AΓ = 10\ cm$:

α) να δείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(100x - x^3), \qquad 0 < x < 10$$

(1,5 Μονάδες)

β) να βρείτε το μήκος του ύψους του παραγόμενου στερεού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.



(3,5 Μονάδες)

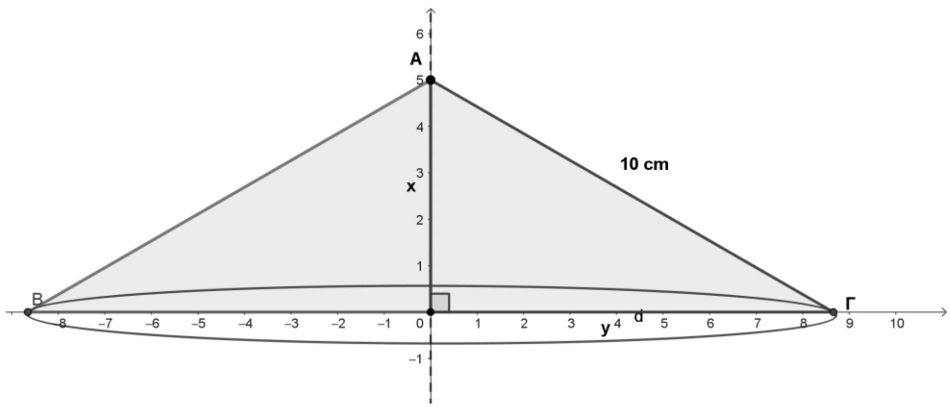
Λύση:

α) Π.Θ: $10^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \qquad (1)$

$$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \frac{\pi y^2 x}{3}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} V(x) = \frac{\pi(100 - x^2)x}{3}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{\pi}{3}(100x - x^3)$$



β)

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(100 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}(100 - 3x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 100 - 3x^2 = 0$$

$\Rightarrow x_o = \frac{10}{\sqrt{3}}$ δεκτή ή $x = -\frac{10}{\sqrt{3}}$ απορρίπτεται

x	0		Xo		10
V'(x)		+	0	−	
V(x)		↗	$T.M.$	↘	

Ο όγκος γίνεται μέγιστος όταν το ύψος του στερεού είναι

$$x_o = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ cm$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>:

Β1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x(x+3)^2$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (2 Μονάδες)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:

i. τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, (3 Μονάδες)

ii. την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, (2 Μονάδες)

iii. τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. (1 Μονάδες)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (2 Μονάδες)

Λύση:

$f(x) = x(x+3)^2$

(α)

$\boldsymbol{\Pi.O.}$: $\mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$

Για $y = 0 \Rightarrow x(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = -3 \Rightarrow (-3,0),\ (0,0)$

(β)

i Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 9 = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -1$ ή $x = -3$

x	$-\infty$ -3 -1 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − 0 +
$f(x)$	↗ Τ.Μ ↘ Τ.Ε ↗

στο $x = -3$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $f(-3) = 0$ $\quad$ $\text{Τ. Μ.}(-3, 0)$

στο $x = -1$παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $f(-1) = -4$ $\quad$ $\text{Τ. Ε.}(-1, -4)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -3]$ και $[-1, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3, -1]$

ii Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$f''(x) = 6x + 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 12 = 0 \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow x = -2$

x	$-\infty$ -2	$+\infty$
$f''(x)$	- 0	+
$f(x)$	⌒	◡

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2\,]$ και κυρτή στο διάστημα $[-2, +\infty)$

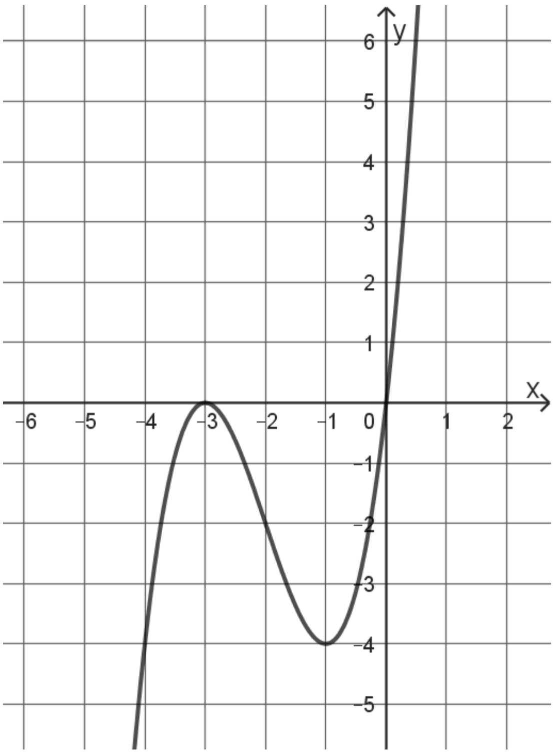
Στο $x = -2$ παρουσιάζει σημείο καμπής το $(-2, -2)$

iii Συμπεριφορά στα άκρα του Π.Ο:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 6x^2 + 9x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 + 6x^2 + 9x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$$

Γραφική Παράσταση



B2 Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες διαβάσματος οκτώ (8) μαθητών για το διαγώνισμα των Μαθηματικών και ο βαθμός που πήρε ο καθένας στο διαγώνισμα αυτό.

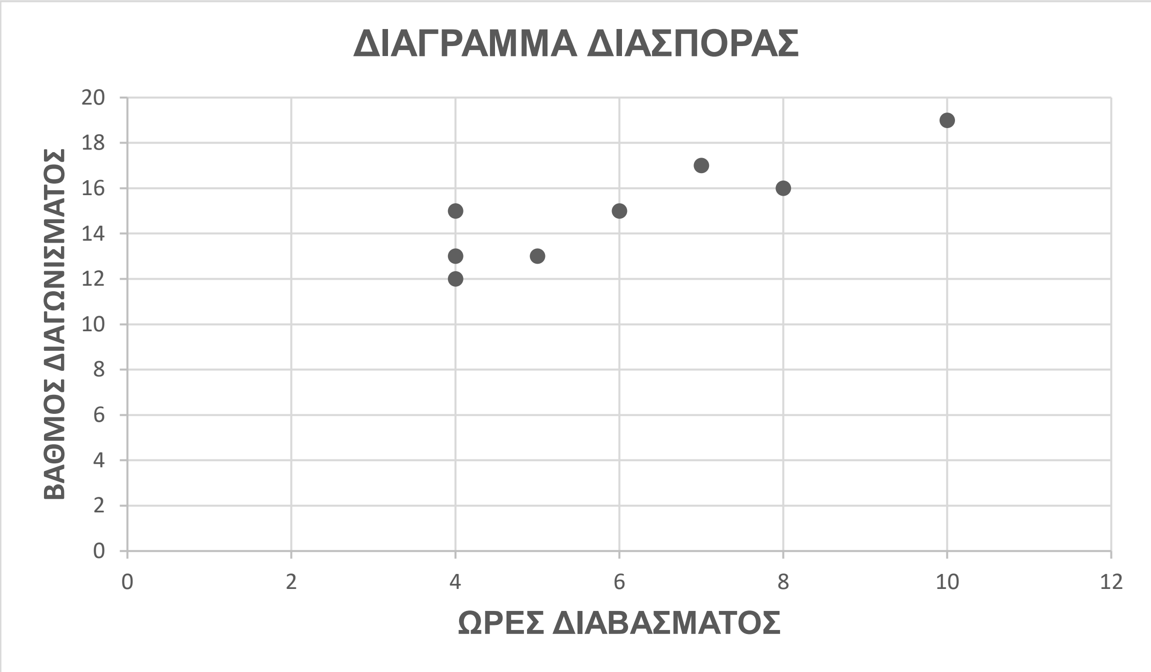
Μαθητής	Ώρες διαβάσματος (x_i)	Βαθμός διαγωνίσματος (y_i)
Μ1	4	13
Μ2	6	15
Μ3	5	13
Μ4	4	15
Μ5	10	19
Μ6	7	17
Μ7	8	16
Μ8	4	12

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. (3 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. (7 Μονάδες)

Λύση:

α)



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ
ΒΑΘΜΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
ΩΡΕΣ ΔΙΑΒΑΣΜΑΤΟΣ

β)

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
4	13	52	4	4
6	15	90	0	0
5	13	65	1	4
4	15	60	4	0
10	19	190	16	16
7	17	119	1	4
8	16	128	4	1
4	12	48	4	9
$\Sigma_x = 48$	$\Sigma_y = 120$	$\Sigma_{xy} = 752$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 34$	$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 38$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_x}{\nu} \Rightarrow \bar{x} = \frac{48}{8} \Longrightarrow \bar{x} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_y}{\nu} \Rightarrow \bar{y} = \frac{120}{8} \Longrightarrow \bar{y} = 15$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \Longrightarrow S_x = \sqrt{\frac{34}{8}} \Longrightarrow S_x = \sqrt{4{,}25} \Longrightarrow S_x = 2{,}06$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{\nu}} \Longrightarrow S_y = \sqrt{\frac{38}{8}} \Longrightarrow S_y = \sqrt{4{,}75} \Longrightarrow S_y = 2{,}18$$

Ισχύει ότι $\Sigma_{x_i y_i} = 752$, $\bar{x} = 6$ και $\bar{y} = 15$ καθώς και ότι $S_x = 2{,}06$ και $S_y = 2{,}18$

Επομένως $r = \frac{\Sigma_{x_\iota y_i} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y} = \frac{752 - 8 \cdot 6 \cdot 15}{8 \cdot 2{,}06 \cdot 2{,}18} = \frac{32}{35{,}93} = 0{,}89$

B3 Μια δεξαμενή περιέχει νερό όγκου $V = 80\ m^3$. Όταν υπάρχει ροή νερού από τη δεξαμενή, δηλαδή όταν η δεξαμενή αδειάζει, ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου δίνεται από τον τύπο:

$$V'(t) = (-2t - 2)\ m^3/h$$

α) Να βρείτε τον τύπο για τον όγκο νερού στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου, $V(t)$. (6 Μονάδες)

β) Να βρείτε τον όγκο του νερού στη δεξαμενή μετά από δύο ώρες. (2 Μονάδες)

γ) Να εξετάσετε αν μετά από 10 ώρες θα υπάρχει νερό στη δεξαμενή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (2 Μονάδες)

Λύση:

α)

$$V(t) = \int V'(t)dt = \int (-2t - 2)dt = -t^2 - 2t + c$$

Για $t = 0$ έχουμε ότι ο αρχικός όγκος του νερού είναι

$$V(0) = 80\ m^3 \Rightarrow c = 80$$

Άρα $V(t) = -t^2 - 2t + 80$

β) $V(2) = -2^2 - 2 \cdot 2 + 80 = 72\ m^3$

γ) $V(t) = 0 \Rightarrow -t^2 - 2t + 80 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 80 = 0 \Rightarrow (t + 10)(t - 8) = 0$

$t = -10$ απορρίπτεται $\qquad t = 8$

Άρα, η δεξαμενή θα αδειάσει σε 8 ώρες. Άρα μετά από 10 ώρες δεν θα υπάρχει νερό στη δεξαμενή.

B4 Σε ένα τραπέζι υπάρχουν ποτήρια γεμάτα πλήρως με χυμό και ένα άδειο κυλινδρικό δοχείο. Το κάθε ποτήρι έχει σχήμα κόλουρου κώνου με ύψος $\upsilon_1 = 12\ cm$ και ακτίνες βάσεων $\rho_1 = 4\ cm$ και $R_1 = 6\ cm$, ενώ το κυλινδρικό δοχείο έχει ακτίνα βάσης $R_2 = 16\ cm$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_\kappa = 3040\pi\ cm^2$. (Τα τοιχώματα και οι βάσεις των ποτηριών και του κυλινδρικού δοχείου θεωρούνται αμελητέου πάχους.)

α) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα (όγκο χυμού) ενός ποτηριού.

(2 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα (όγκο) του κυλινδρικού δοχείου.

(4 Μονάδες)

γ) Αδειάζουμε το περιεχόμενο όλων των ποτηριών στο κυλινδρικό δοχείο και η στάθμη του χυμού φτάνει στα $\frac{4}{5}$ του ύψους του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ποτηριών που υπήρχαν γεμάτα πλήρως με χυμό πάνω στο τραπέζι.

(4 Μονάδες)

Λύση:

α)

$$V_{\pi o \tau \eta \rho \iota o \acute{\upsilon}} = \frac{\pi \cdot \upsilon_1}{3}(\rho_1^2 + \rho_1 \cdot R_1 + R_1^2) \Rightarrow V_{\pi o \tau \eta \rho \iota o \acute{\upsilon}} = \frac{\pi \cdot 12}{3}(4^2 + 4 \cdot 6 + 6^2)$$

$$V_{\pi o \tau \eta \rho \iota o \acute{\upsilon}} = 304\pi\ cm^3$$

β)

$$E_{\kappa\ \kappa\upsilon\lambda} = 2\pi R_2 \upsilon_2 \Rightarrow 3040\pi = 2\pi \cdot 16 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow 3040 = 32\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = 95\ cm$$

$$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi \cdot R_2^2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow V_{\kappa\upsilon\lambda} = 16^2 \cdot 95 \cdot \pi = 24320\pi\ cm^3$$

γ)

Όταν η στάθμη του χυμού στον κύλινδρο φτάνει στα $\frac{4}{5}$ του ύψους του κυλίνδρου, τότε ο όγκος του χυμού είναι

$$V_{\chi\upsilon\mu o\acute{\upsilon}} = \pi \cdot R_2^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\upsilon_2\right) \Rightarrow V_{\chi\upsilon\mu o\acute{\upsilon}} = \pi \cdot 16^2 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot 95\right) \Rightarrow V_{\chi\upsilon\mu o\acute{\upsilon}} = 19456\ \pi\ cm^3$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{V_{\chi\upsilon\mu o\acute{\upsilon}}}{V_{\pi o \tau \eta \rho \iota o \acute{\upsilon}}} = \frac{19456\ \pi}{304\ \pi} = 64$$

Άρα ο αριθμός των ποτηριών που υπήρχαν γεμάτα πλήρως στο τραπέζι ήταν 64.

Β5 Τέσσερις Ιταλοί και δυο Κύπριοι θα παρακολουθήσουν ένα αγώνα του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος ποδοσφαίρου (EURO) σε μια μπυραρία. Η μπυραρία έχει διαθέσιμες τρεις καρέκλες και ένα τετραθέσιο καναπέ, σε σειρά, μπροστά από την τηλεόραση. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα έξι άτομα, αν:

α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, (3 Μονάδες)

β) οι δυο Κύπριοι θα καθίσουν στον καναπέ, ο ένας δίπλα στον άλλο, (3 Μονάδες)

γ) τουλάχιστον ένας Κύπριος θα καθίσει σε καρέκλα. (4 Μονάδες)

Λύση:

<u>Α΄ Τρόπος</u>

α) $\varDelta_6^7 = \frac{7!}{(7-6)!} = 5040$

β) $3 \cdot M_2 \cdot \varDelta_4^5 = 3 \cdot 2! \cdot \frac{5!}{(5-4)!} = 720$

γ) $\varDelta_6^7 - \varDelta_2^4 \cdot \varDelta_4^5 = \frac{7!}{(7-6)!} - \frac{4!}{(4-2)!} \cdot \frac{5!}{(5-4)!} = 5040 - 1440 = 3600$

<u>Β΄ Τρόπος</u>

α)

Κυπ1	Κυπ2	Ιτ1	Ιτ2	Ιτ3	Ιτ4			
7	6	5	4	3	2	=7!	=5040	

β)

Κυπ1	Κυπ2	Ιτ1	Ιτ2	Ιτ3	Ιτ4			
3	2	5	4	3	2	=6 . 5!	=720	

γ)

Κυπ1 καρ	Κυπ2 καν		Ιτ1	Ιτ2	Ιτ3	Ιτ4			
3	4	2	5	4	3	2	=24 . 5!	=2880	

Κυπ1 καρ	Κυπ2 καρ		Ιτ1	Ιτ2	Ιτ3	Ιτ4			
3	2		5	4	3	2	=6 . 5!	=720	

$2880 + 720 = 3600$

<u>Γ΄ τρόπος</u>

γ)

Όλες οι περιπτώσεις εκτός και οι δύο στον καναπέ

Κυπ1 καν	Κυπ2 καν		Ιτ1	Ιτ2	Ιτ3	Ιτ4			
4	3		5	4	3	2	=12 . 5!	=1440	

$5040 - 1440 = 3600$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ